



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Dette er en digital kopi af en bog, der har været bevaret i generationer på bibliotekshylder, før den omhyggeligt er scannet af Google som del af et projekt, der går ud på at gøre verdens bøger tilgængelige online.

Den har overlevet længe nok til, at ophavsretten er udløbet, og til at bogen er blevet offentlig ejendom. En offentligt ejet bog er en bog, der aldrig har været underlagt copyright, eller hvor de juridiske copyrightvilkår er udløbet. Om en bog er offentlig ejendom varierer fra land til land. Bøger, der er offentlig ejendom, er vores indblik i fortiden og repræsenterer en rigdom af historie, kultur og viden, der ofte er vanskelig at opdage.

Mærker, kommentarer og andre marginalnoter, der er vises i det oprindelige bind, vises i denne fil - en påmindelse om denne bogs lange rejse fra udgiver til et bibliotek og endelig til dig.

Retningslinjer for anvendelse

Google er stolte over at indgå partnerskaber med biblioteker om at digitalisere offentligt ejede materialer og gøre dem bredt tilgængelige. Offentligt ejede bøger tilhører alle og vi er blot deres vogtere. Selvom dette arbejde er kostbart, så har vi taget skridt i retning af at forhindre misbrug fra kommerciel side, herunder placering af tekniske begrænsninger på automatiserede forespørgsler for fortsat at kunne tilvejebringe denne kilde.

Vi beder dig også om følgende:

- Anvend kun disse filer til ikke-kommercielt brug
Vi designede Google Bogsøgning til enkeltpersoner, og vi beder dig om at bruge disse filer til personlige, ikke-kommercielle formål.
- Undlad at bruge automatiserede forespørgsler
Undlad at sende automatiserede søgninger af nogen som helst art til Googles system. Hvis du foretager undersøgelse af maskinoversættelse, optisk tegngenkendelse eller andre områder, hvor adgangen til store mængder tekst er nyttig, bør du kontakte os. Vi opmuntrer til anvendelse af offentligt ejede materialer til disse formål, og kan måske hjælpe.
- Bevar tilegnelse
Det Google-"vandmærke" du ser på hver fil er en vigtig måde at fortælle mennesker om dette projekt og hjælpe dem med at finde yderligere materialer ved brug af Google Bogsøgning. Lad være med at fjerne det.
- Overhold reglerne
Uanset hvad du bruger, skal du huske, at du er ansvarlig for at sikre, at det du gør er lovligt. Antag ikke, at bare fordi vi tror, at en bog er offentlig ejendom for brugere i USA, at værket også er offentlig ejendom for brugere i andre lande. Om en bog stadig er underlagt copyright varierer fra land til land, og vi kan ikke tilbyde vejledning i, om en bestemt anvendelse af en bog er tilladt. Antag ikke at en bogs tilstedeværelse i Google Bogsøgning betyder, at den kan bruges på enhver måde overalt i verden. Erstatningspligten for krænkelse af copyright kan være ganske alvorlig.

Om Google Bogsøgning

Det er Googles mission at organisere alverdens oplysninger for at gøre dem almindeligt tilgængelige og nyttige. Google Bogsøgning hjælper læsere med at opdage alverdens bøger, samtidig med at det hjælper forfattere og udgivere med at nå nye målgrupper. Du kan søge gennem hele teksten i denne bog på internettet på <http://books.google.com>

70

71

De
første Grunde
af
den rene Mathematik.

F o r s ø g
til en
L æ r e b o g

for
Skoler *Skole*

ved
Hans Christian Linderup.

Anden Dele.

Anden, ved flere betydelige Forandringer og Tillæg
forbedrede, og med en kort Afhandling om de
krumme Linier, der almindelig kaldes
Reglesnitte, forøgede Udgave.

Med 8 Kobber.

København, 1807.

Trykt og forlagt af Directeur J. F. Schultz,
Kongelig og Universitets-Bogtrykker.

QA

39

L74

1807

100

Den
Kongelige Direction
for
Universitetet og de lærde Skoler

t i l e g n e s

Denne forbedrede og forøgede Udgave

af

Forsøg til en Lærebog i den rene Mathematik

med den dybeste Orefrygt, største Agtelse og
sandeste Taknemmelighed

underdanigst og ærbødigt

af

Forfatteren.

I r f t e D e e l

Hist Sci
Nacring
11-4-26
13983

Forerindrig til første Udgave.

2-23-40
mg2
Her følger Slutningen eller anden Deel af det
Forsøg til en Lærebog, hvoraf omtrent det Halve
eller første Deel udkom i Aaret 1799. For dette
lange Ophold beder jeg om mine Læseres Tilgivelse.
Jeg kunde anføre mange baade vigtige og mindre
vigtige Aarsager til dette Ophold; men jeg troer,
bedre Aet ingen at anføre, og i det Sted bede om
en gunstig Modtagelse for min Bog, nu da den
endelig kommer, at den ikke endnu skulde komme
for tidlig.

Angaaende Planen, jeg har fulgt til at udarbejde
dette Forsøg, tillades det mig blot at gøre opmærksom
paa Følgende: Jeg har fremsat de forskellige ens-
telte Stykker eller Dele af Videnskaben i den Ord-
den, som jeg efter min Overbeviisning troer at de
bør foredrages, uden derfor at paastaa, at det er
den

den bedste. Enhver Lærer kan derfor efter eget Skisønnende forandre denne Orden, uden at Bogen derfor bliver mindre brugbar. At undersøge nære og med Grunde godtgjøre, hvorfor jeg troer, at den af mig i nærværende Bog fulgte Orden i Materielernes Fremføttelse ogsaa er den, som jeg anseer for rigtigst at følge ved Underviisningen, vilde lede mig videre, end de her foreskrevne Grændser tillade; jeg vil derfor opsætte denne Undersøgelse til en anden Tid og paa et andet Sted.

Om Udarbejdelsen selv har jeg intet videre at sige, end at jeg derpaa har anvendt al muelig Flid, og at de fleste Afsnit ere flere Gange omarbejdede. Jeg har giennemlæst de fleste mig bekjendte Skrifter i samme Materie og benyttet mig deraf. Læseren vil vel ikke her forefinde noget egentlig Nyt, og det er nok ueppe at vente i en Bog af den Art; dog haaber jeg, at enhver upartisk Læser vil finde, at jeg ikke blindt hen har fulgt Nogen, men selv nære giennemtænkt og prøvet Alt, for at fremsætte det med mueligste Orden og Tydelighed; og hvis dette kun nogenledes er lykkedes mig, troer jeg ikke denne lille Bog overflødig.

I Henseende til Bogens Indhold, da har min Hensigt været, at den skulde indfatte det af den rene Mathematik, som foredrages i de forandrede lærde Skoler efter den for disse Skoler allernaadigst approberede Plan. For disse Skoler, hvor den efter Skole-Commissionens Forslag er indført, er den især skrevet; dog tror jeg, at den kan bruges i ethvert Institut og ved enhver Undervisning. Ligesom det og har været mig en ikke ringe Opmuntring at erfare, at den første Deel allerede mange Steder er brugt.

Da begge Dele beqvemt kan indbindes samlede, som jeg og ønskede for Kobbernes Skyld, da nogle faa Figurer paa de Kobbere i første Deel høre til Sætninger, der forekomme først i anden, og omvendt (en Feil, som bedes undskyldt, og som er forarsaget af Textens oftere Omarbejdelse efterat Pladerne vare stukne), saa har Forlaggeren, efter min Anmodning, besørget forskiellige Titelblade, nemlig baade til begge Dele under eet og til anden Deel for sig selv.

At her intet findes om Reglesnittene og den sphæriske Trigonometrie, er, fordi jeg ikke er ganske
 eenig

enig med mig selv, hvorvidt disse Dele af Mathematiken bør foredrages i de lærde Skoler; og jeg vilde, at min Bog intet Andet skulde indeholde, end hvad der bør læses. Imidlertid er en Afhandling om Reglesnittene allerede trykt og Pladerne stukne; dertil skal jeg føie de første Grunde af den sphæriske Trigonometrie, da dette, der vil udgiøre 5 à 6 Ark, kan ansees som et Supplement eller Anhang til Bogen, hvori jeg mueligt tillige kan faae Leilighed at anføre en eller anden Ketteelse eller Tillæg til det i Bogen selv Forebragne.

Jeg har nu intet videre at tillægge, uden at anbefale min Bog til Læsernes gunstige Dom.

København, d. 7 Septbr. 1803.

Forfatteren.



Forerindring til anden Udgave.

Efter Forelæggerens Hr. Directeur Schulk's Anmodning har jeg besørget denne anden Udgave af min mathematisk Lærebog, og deri anbragt flere ikke ubetydelige Forandringer, Rettelser og Tillæg, som jeg efter min senere Erfaring troede dels passende, dels nødvendige. At opregne disse Forandringer anseer jeg for overflødigt, da enhver opmærksom Læser let selv opdager dem. Ligeledes har jeg tilføjet en kort Afhandling om de krumme Linier, som almindelig faa Navn af Reglesnitte. Jeg har anvendt al Flid paa at gjøre denne Udgave, ved de Tillæg den har faaet, saa fuldkommen som det var mig muligt. I Afhandlingen om Reglesnittene har jeg allene anført det, som jeg troede med Nytte kunde foredrages i de lærde Skoler; og vil ikke, at det paa nogen Maade skal ansees som nogen fuldstændig

dig

dig Afhandling derom, som jeg ikke troede passende i en Skolebog. Jeg har heller ikke tilføjet den spheriske Trigonometrie, da den ikke læses i Skolerne. To nye Kobber-Tavler ere komne til, som indeholde Kobberne de krumme Linier vedkommende. Den værdige Forlægger skylder jeg offentlig Tak, baade for den Edelmødighed, hvormed han under dette Arbejde har understøttet mig, da jeg ellers ikke skulde kunde bragt det til Ende; som og for at han intet har sparet for at give Bogen al den udbortes Fuldkommenhed som mueligt. Jeg har nu intet videre at tilføje, end at bede den gunstige Læser, med Skaansel at bedømme denne forbedrede Udgave, og bære over med de Ufuldkommenheder, Bogen endnu maatte have, og som de just ikke gunstige Omstændigheder, under hvilke jeg har besørget den, let kan have forårsaget.

Kjøbenhavn, den 30 März 1807.

Forfatteren.

Indhold.

Første Deel.

| | Side |
|---------------------------------|------|
| Prolegomena eller Forerindring. | I |

Arithmetik eller Tal-Videnskab.

| | | |
|-------|--|-----|
| I. | Om Tal og de Tegn, hvormed de skrives | 14 |
| II. | De fire Regningsarter i hele Tal | 19 |
| III. | Om Brøst og de fire Regningsarter med Brøst | 49 |
| IV. | Grundsætninger | 65 |
| V. | Om modsatte Størrelser | 67 |
| VI. | Om Decimal- eller Tiendedeels-Brøst | 85 |
| VII. | Om Potenser og deres Rødder | 94 |
| VIII. | Om Forhold og Proportioner. | 123 |
| IX. | Proportioners Anvendelse til praktisk Regning | 139 |

Plan-Geometrie.

| | | |
|------|---|-----|
| I. | Indledning | 144 |
| II. | Om de forskellige Arter af Figurer, og især om Cirklen | 149 |
| III. | Om | |

XIV

| | Side |
|--|------|
| III. Om Triangler, især om deres Egestorhed | 156 |
| IV. Om parallelle Linier og de deraf dannede Figurer | 168 |
| V. Om Linier og Vinkler i og ved Cirkler | 186 |
| VI. Om Forhold og Proportioner mellem Linier, og Figurers Egebandhed | 202 |
| VII. Om Forhold mellem Figurerne's Flader | 232 |
| VII. Om Liniers og retlinede plane Figurers Udmaaling. | 239 |

Anden Deel.

Widere Udførelse af Regning med almindelige Tegn eller Bogstaver.

| | |
|---|----|
| I. Om Brøktregning med Bogstaver | I |
| II. Om Potenser, Rodstørrelser og deres Egrandring | 10 |
| III. Anvendelse af Læren om Potenser paa Decimalbrøkt | 29 |

Om Equationer eller Ligninger og deres Oplosning.

| | |
|--|----|
| I. Om Ligninger i Almindelighed | 31 |
| II. Om enkelte Ligningers Oplosning og deres Anvendelse til arithmetiske Problemer | 38 |
| III. Om | |

| | | |
|-------|---|-----|
| III. | Om quadratiffe saavel rene som urene Figninger med een eller flere bekiendte Størrelser | 69 |
| IV. | Om ubestemte Problemer, i hvilke de ube- kiendte Størrelser skal være hele og be- kræftende Tal | 86 |
| V. | Bidere Udførelse af Læren om geometris- ke Forhold og Proportioner | 90 |
| VI. | Om arithmetiske ProgreSSIONer eller Tal- rækker | 94 |
| VII. | Om geometriske ProgreSSIONer eller Tal- rækker | 102 |
| VIII. | Om Logarithmer og Logarithme-Tavler samt deres Brug | 114 |
| IX. | De geometriske Talrækkers og Logarith- mernes Anvendelse til forskjellige Opga- vers Oplosning | 147 |
| X. | Om forskjellige enkelte Tinges Omsætnin- ger og Forbindelser | 158 |

Geometrie. Anden Deel.

Stereometrie eller Lære om Legemer.

| | | |
|------|---|-----|
| I. | Om rette Liniers og Planers Beliggenhed mod hinanden | 169 |
| II. | Om geometriske Legemer i Almindelighed | 180 |
| III. | Om Prismen, Cylinderen og deres Ud- maalning | 189 |
| IV. | Om Pyramider og Kegler og deres Ud- maalning | 218 |

| | Side |
|---|------|
| V. Om Kuglen og dens Udmaaling, samt Kegemærnes Kubatur og Forvandling | 221 |

Plan-Trigonometrie.

| | |
|--|-----|
| Inledning | 241 |
| I. Om de trigonometriske Linier | 244 |
| II. Om Indretningen og Brugen af trigo- nometriske Tabler | 265 |
| III. Om plane Trianglers trigonometriske Be- regning | 266 |
| IV. Trigonometriens Anvendelse paa Cirkler og regulaire Polygoner | 292 |
| Praktisk Landmaaling | 297 |

Om de frumme Linier.

| | |
|-------------------|-----|
| Inledning | 319 |
| I. Om Parablen | 331 |
| II. Om Ellipsen | 336 |
| III. Om Hyperblen | 354 |

Prolegomena eller Forerindring til Mathematiken.

Om Mathematikens Gienstand, og
dens forsktellige Deele.

§. I.

Størrelse (quantitas) er den Egenkab ved en Ting, at den kan modtage Tilvæxt eller Aftagelse, v. en Bestemmelse, hvor ofte til en Tings Frembringelse en ligeartet Ting maae igientages.

Anmærkning. Ting ere ligeartede; (homogeneæ) naar de indbefattes under et fælles Begreb; Vist som dette Begreb er forsktelligt, kan de samme Ting være snart ligeartede, snart uligeartede. Især er

En Størrelse (quantum), kaldes, enhver Ting hvort Størrelse (quantitas) findes. Med. En hver Størrelse bestaaer derfor af ligeartede Deele. Ere disse ligeartede Dele saaledes forenede at hinanden, at hver den ene omfatter den anden den umiddelbar begynder, kaldes Størrelsen

21

sam-

sammenhængende (quantum continuum), f. Ex. Rum. Naar Deelene derimod ikke saaledes ere forenede, er det en adskilt Størrelse (quantum discretum) f. Ex. en Armee, et Bibliothek.

En sammenhængende Størrelse kan være enten extensiv (udstrakt) eller intensiv (Kraft-stor).

Extensiv, naar dens ligeartede Deele ere uden for hinanden, og opfylde forskiellige Rum, saa at dens Frembringelse ved deres Forening er mulig, f. Ex. en Linie.

Intensiv, naar dens ligeartede Deele ikke ere uden for hinanden, og Størrelsen altsaa ikke ved deres Sammensætning kan tænkes frembragt, men maae betragtes som en Eenhed, f. Ex. Varme.

§. 2.

Tydelige Begreb om enhver Art af Størrelses, erholdes først ved Sandserne; dernæst ved at sammenligne en saaledes bekiendt Størrelse med en ligesaa ubekiendt; anstilles denne Sammenligning med adskilte Størrelser, falder den Tælling; og den bekiendte Størrelse en Eenhed; bestemmer man derimod paa denne Maade en ubekiendt Udstrækning, saa falder den bekiendte Størrelse, Måal eller Måalestof, og Sammenligningen en Udmaalning. De intensive Størrelser kan af Mangel paa en bekiendt Eenhed eller Måalestof

lestof ikke paa denne Raade bestemmes. Endog ved de adskilte og extensive Størrelser, lader denne umiddelbare Sammenligning sig ofte ikke foretage; man maae derfor vide ved Slutninger at bestemme en ubekiendt Størrelse ved Hielp af de ved Tællning og Maalning bekiendte, og til den Ende undersøge de bekiendte Størrelses Forbindelse med den ubekiendte. Denne videnskabelige Rundkøbe om Størrelser, og deres Forbindelse kaldes Mathematik: den forudsætter den umiddelbare Tællning og Maalning, og lærer at bestemme ubekiendte Størrelser, der hvor disse ei kan anvendes, formædelt Slutninger og visse Opfindelses Metoder.

§. 3.

Enhver Størrelse kan betragtes blot som Størrelse, uden Hensyn til nogen virkelig eksisterende Ting v. affondret fra alle en Tings øvrige Egenskaber, og da kaldes den en abstract (ubenævnt, affondret) Størrelse; eller og med Hensyn til, eller som Egenskab hos en virkelig Ting, og da faaer den Navn af en concret (benævnt v. bestemt) Størrelse. Med Hensyn til den rene Mathematik (Mathese pura, theoretica) at gøres med disse betingelser anvendes eller udelevende Mathese applicata v. practica) som det er almindeligt.

De Størrelser som efter §. 2, ere Gienstand-
den for Mathematik ere alleene de adskilte og ex-
tensive; Den reene Mathematik har altsaa kun
tvende Hoved-Deele. Arithmetik (Tall-Videnskab)
handler om de adskilte Størrelser abstract betrag-
tede. Geometrie (Maale-Videnskab v. Videnskab
om Rum) om de sammenhængende extensive Stør-
relser. Dog henregnes i Almindelighed til den
reene Mathematik, foruden de tvende nævnte Ho-
ved-Deele, ogsaa Trigonometrie og de analytiske
Videnskaber. Trigonometrien lærer af tre givne
Stykker i en Triangel at finde de øvrige ved Be-
regning, og er enten plan, som har plane retli-
nede Triangler til Gienstand eller sphærisk, hvis
Gienstand ere sphæriske eller Kugle-Triangler. De
analytiske Videnskaber (analysis) indeholde de
almindelige Opfindelses-Metoder for begge Ho-
ved-Arter af Størrelser, saavel adskilte som sam-
menhængende.

Da saavel Geometrie som Arithmetik ere an-
vendelige paa alle sandelige Gienstande, saa vil
de den høje Mathematik, endog blive skilt for den
anvendte Mathematik, og den maa altsaa in-
deholde saa mange forskellige Deele, som der gi-

ved forskjellige Ting i Naturen, hvis Størrelse lader sig bestemme. Men da det vilde være uhyggeligt at hense en saa uhyggelig Mængde af Deele til den anvendte Mathematik, især da den rene Mathematik uden videre Forklaring umiddelbar lader sig anvende paa mangfoldige sandfælsige Gjenstande; saa deeler man nu i Almindelighed de til den anvendte Mathematik hørende Videnskaber i følgende 4 Hoved-Classer, nemlig: de Mechaniske, Optiske, Astronomiske og Akustiske Videnskaber, og henregne dertil følgende Dele.

I. De Mechaniske Videnskaber, om Ligevægt og Bevægelse, derunder hører

- 1) Statik: Videnskab om faste Legemers Ligevægt.
- 2) Mechanik, om faste Legemers Bevægelse
- 3) Hydrostatik, om Vandets Ligevægt og Tryk.
- 4) Hydraulik, om Vandets Bevægelse.
- 5) Aerometrie, om Luftens Ligevægt og Bevægelse.

II. De Optiske Videnskaber, om Lyset, nemlig:

- 1) Optik, om Lys-Stråaler, som fra Objectet gaaet en ret Linie faldt i Øiet.
- 2) Katoptrik, om tilbagefaldende Lysstråaler.
- 3) Di-

- 3) Dioptrik, om brækkede Lysskæaer.
 - 4) Perspectiv, om Objecternes Aftegning paa en Flade, saaledes som de i en given Afstand og Beliggenhed viser sig for Øiet.
- Hertil kunde endnu regnes Photometrie og Pyrometrie, om Lysets og Ildens Kraft; men disse Videnskaber ere endnu i deres Barndom og fortjene ikke Navn af Mathematiske Discipliner.

III. De Astronomiske Videnskaber, om Himmelslegemerne og Jorden; dertil regnes:

- 1) Astronomie, om Himmelslegemernes Bevægelse, Størrelse og Afstand.
- 2) Geographie, om Jordens Figur og Størrelse, samt Stedernes Beliggenhed paa samme.
- 3) Chronologie, om Tids-Bestemmelsen ved Himmelslegemernes Bevægelse.
- 4) Gnomonik, om Tids-Bestemmelsen, for medelst Sol, Maane og Stjerne-Uhre.

IV. De Arkitektoniske Videnskaber, hvortil hører:

- 1) Borgerlig Bygningskunst, om Bygningers Opførelse og beqvemme Indretning.

2) Skibs-

2) Skibs-Bygningss-Kunst, om Skibenes rette Dannelsse, især under Vandet, at de paa beste Maade svare til deres Bestemmelse.

3) Artillerie-Videnskab, om Skyde-Geværers og andre Vaabens Indretning, som bruges til Angreb og Forsvar.

4) Krigs-Bygningss-Kunst v. Fortification, om Fæstningsværkers Anlæg, samt hvorledes de angribes og forsvares.

De arkitektoniske Videnskaber ere imidlertid ikke blot mathematiske; men udfordre foruden Mathematiske Kundskaber, som ere aldeles nødvendige, en Rængde andre Kundskaber, som ligge uden for Matematikens Grændser.

§. 6.

Mathematik inddeles end videre i elementar (lavere) Mathematik og høiere (sublimior). Hiin indskrænker sig blot til de første Grund-Lærdomme, og har sin bestemte Grænse, Denne begynder, hvor hiin ophører, og fortsætter sine Undersøgelser i det uendelige. I Hensende til Methode og Foredrag ere den elementære og høiere Mathematik fuldkommen forskellige; da der i den elementære bestandig bruges den syntetiske Methode, (hvor man gaaer frem fra det enkleste til det sammensatte) og i den høiere den analytiske (hvor man gaaer tilbage

bage fra det sammensatte til det enkelte) og derved kan Grænse-Linien imellem disse Deele nøiagtigst bestemmes. Man kunde altsaa inddeele, 1) Arithmetik i den gemeene (lavere) som maatte indbefatte simpel Regning og Bogstav Regning, samt Ligningers Oplosning af 1ste og 2den Grad, og den høiere, som undersøger Naturen og Oplosningen af alle mulige Ligninger, og indbefatter integral og differential Regning. 2) Geometrie i den lavere (elementar) som handler alene om rette Linier, og den ene krumme Linie Cirkel-Linien og de Flader og Legemer som ved rette Linier og Cirkel-Linier kan konstrueres, og høiere, hvorunder henhører alle øvrige krumme Linier, Flader og Legemer.

Om Mathematikkens Nytte.

§. 7.

Mathematiken er saaledes en Samling af mange forskellige Videnskaber, af hvilke enhver især indeholder en Række Kundskaber, hvis Vigtighed og Nytte neppe behøver videre at vides. Dens Anvendelse til at forstaae det Menneskelige Livs Nødvendigheder og Begivenheder, gjør den nødvendig og vigtig for enhver kultiveret Ration, og at udvide dens Egenomme er virkelig at befordre

fordre Menneſſe-Held og Lykſalighed. Men foruden denne almindelige Nytte, medfører Mathematiken for dens Dyrkere den ſærdeles vigtige Fordeel: at den ſkærper Forſtanden, og over den i at dømme ſikkert og rigtigt. Forſtandens ſkærpeſe og Øvelse i at dømme grundigt er uundværlig for enhver Studerende; og ſaare nødvendig for ethvert vel opdraget Menneſſe; men denne Fordeel forſkaffer ingen Videndiſkab i den Grad ſom Mathematik. Thi da Dømme-Kraften beſtandig har Tingene for Øine, og ligesom beſtuer dem; ſaa gaaer den i at anvende de logiſke Regler ſikkert frem, og er i Stand til let at opdage enhver Feil Slutning, hvor ſkiult den endog maatte være.

Paa denne Maade vennes Dømme-Kraften uſormært mere og mere til med Sikkerhed at ſkies virkelig Overbeviſning fra bedrøgende Blendværk, og Mathematikens Studium bliver ſaaledes den tilforladeligſte praktiſke Logik, og tillige den beſte Skole for Dømme-Kraften. Denne Fordeel befordres end mere ved den ſtrenge Methode (Fremgangsmaade) ſom i ingen anden Videndiſkab ſaa nøie og fuldkommen kan følges. Vil man alſo ſaa vente at opnaae denne omfattende Nytte, maa Mathematiken aldeles behandles efter den ſtrange Euclidſke Methode; For Konger vilde denne ſande Geometer ikke at jævne Vejen til Geometrien; og

virkelig ethvert Forsøg til saaledes at lette Veien ,
 saa behageligt det end kunde synes , tiener meere
 til at vanskeliggjøre end til at lette Mathematiskens
 Studium. Man maae altsaa nødvendig strax gjøre
 sig en rigtig Forestilling om denne Mathematiske
 Methode.

Om den Mathematiske Lære-Methode.

§. 9.

For at kunde gjøre sig et rigtigt Begreb om
 denne Methode , maae man nødvendig først for-
 staae de Konst-Ord , under hvilke de Mathematiske
 Lærdomme fremsættes. De vigtigste ere Forkla-
 ringe (definitiones) Satse (propositiones) og
 Anmærkninger (scholia), hertil kommer endnu i
 den anvendte Mathematik, Erfaringer og Forsøg.
 Forklaringen over disse Konst-Ord læres egentlig i
 Logiken, men maae for Tydeligheds Skyld her frem-
 sættes.

§. 10.

En Forklaring (definitio) er en tydelig og
 usiagtig Bestemmelse af hvad der forstaaes ved en
 Ting, den maae altsaa hverken indeholde flere
 eller færre Kiendemerker, end der ere tilstrække-
 lige til at give et bestemt Begreb om den Ting, hvor-
 om der tales.

En Sats (propositio) er en Bestemmelse af Forholdet imellem tvende Forestillinger. Den ene, om hvilken den anden bekræftes eller nægtes, kaldes subject; (Gienstand), den anden prædicat (Beskaffenhed).

En Sats er theoretisk, naar den blot bestemmer at en Ting er saaledes eller ikke saaledes, praktisk, naar den bestemmer at noget skal ske, og hvorledes det skal ske.

En theoretisk Sats, hvis Sandhed er, naar man blot forstaaer Ordene hvorved den udtrykkes saa tydelig, at den intet Beviis behøver, kaldes en Grundsats (Axioma).

En praktisk Sats af samme Slags kaldes Fordrings-Sats (postulat).

Naar derimod Sandheden og Rigtigheden af en Sats ikke umiddelbar indses, men behøver at beviises, hedder den, hvis Satsen er theoretisk, en Lære-Sætning (theorema), og hvis den er praktisk, et Bærkestykke, en Opgave (problema). En Sats som enten umiddelbar eller ved en let Slutning afledes af en anden foregaaende, kaldes en Folge, et Tillæg (corollarium). En Lære-Sætning eller Opgave, som indføres i en Videnskab, hvor den ikke egentlig henhører, hedder en Laane-Sætning (lemma). En Anmærkning (scholion) indeholder blot tilfældige Oplysninger, som

som anvendes ved en Definition eller Sats; eller
og Anvisninger til at gøres opmærksomme paa
det særdeles vigtige i Beviset.

En Mathematisk Bevis (Demonstratio)
er en intuitiv (beskuelig) Fremstilling af den nød-
vendige Forbindelse imellem en Sats's Subject og
Prædicat. Demonstrationer ere enten directe
(uden Omveje) eller indirecte (apagogiske d. med
Omveje) Disse vise en Sats's Rigtighed af den mod-
sættes Umulighed, hvilke ligesom af selvklare eller
forudbestemte Sætninger.

§. I R.

Den Methode, efter hvilken Mathematikerne
gaar frem, bestaaer altsaa i følgende: De begynde
med Forklaringer og give om enhver Ting, hvor-
om de tale, hvis den ikke af sig selv er klar, en
bestemt Definition. Enhvert Ord de bruge har
fuldstændig bestemt og tydelig Betydning, fra
hvilken de aldrig afvige. Efter Forklaringerne
anføres de til forstaaelige Grundfærminger, og
ved Hjælp af disse vises bestandig ikke alene Mu-
ligheden af den forklarede Sag, men endog Maa-
den, hvorpaa den er mulig. Hverken i et Pro-
blems Oplosning eller i et Theorems Demonstration
maa forekomme en Sats, som ikke i Forveien er
fremsat enten som Axiom, Postulat, eller beviist
som

som Theorem Problem og Corollarium og her kan citeres. Til Forkortning i deres Sprog betiene de sig af det vigtige Kantsregels, at i Sæden for Ord, udtrykke de Størrelserne selv ved Tall eller Bogstaver, og Deres Forbindelse med hinanden eller Forhold til hinanden ved bequemme Tegn.

Men denne Fremgangsmaade, der i Grunden ikke er andet, end den videnskabelige eller systematiske, bør og kan bruges og følges i enhver anden Videnskab, ligesaa nøie som i Mathematiken;

Det væsentlige altsaa i den mathematistiske Methode bestaaer ikke deri, men som Kant i sin Kritik der reinen Vernunft tydelig viser, allene deri at Mathematikeren ikke som Philosophen gaaer frem ved at slutte (discursive), men ved selv at danne og konstruere sine Begreber i Tiden og Rummet, (intuitiv). Heraf sees tillige, at Mathematiken alene kan anvendes paa sandfælsige Gjenstande (phenomener) som de eneste der kan gøres bekvæmlige.

Arithmetik eller Tal-Videnskab.

Om Tal og de Tegn hvormed de skrives.

§. 12.

Følge den nylig forklarede Methode, begyndes altsaa med Forklaringer:

Den Egenskab, som flere ligeartede Størrelser (§. 1, Anmerk.) have tilfælles, kaldes **Eenheden**: v. en enkelt Størrelse i sit Slags for sig alleene betragtet, kaldes en **Eenhed**. Fleere ligeartede Størrelser eller Eenheder tilsammentagne udgiøre et **Tal**, som altsaa er en Mængde af Eenheder. Men da enhver Størrelse eller enhver Eenhed bestaaer af Deele, eller i det mindste kan ansees at være sammensat af Deele, saa er det klart, at en Eenhed i Hensigt til dens Deele ogsaa kan betragtes som et Tal.

At tælle er at igientage Eenheden; følgelig kan alleene de ligeartede Størrelser sammmentæles: f. Ex. Tre Jyder og to Høsteneere kan ikke sammmentæles, da de ikke ere ligeartede Størrelser, men bringes de under et fælles Begreb, og betragtes som **Danst**, da blive de ligeartede og kan sammmentæles, og udgiøre fem.

§. 13.

De ved Eenhedens Igientagelse fremkomne Mængder af Eenheder udtrykkes ved dertil valgte Ord

Ord

Ord, som kan kaldes Tal-Ord, saaledes: naar en vis Eenhed lagges til sig selv, benævnes den da udfornne Mængde med Tal-Ordet: to; lagges til denne Mængde den samme Eenhed endnu een-gang, da udtrykkes den frembragte Mængde ved tre o. s. v.

For des lettere at kunde benævne den forskellige Mængde af Eenheder, som saaledes ved Tælning kunde frembringes, betiener man sig kun af følgende usammensatte Tal-Ord, een, to, tre, fire, fem, sex, syv, otte, ni, ti; hvis Bemærkelse af det forhen sagte, let forstaes, naar Tgientagelsen videre fortsettes, bruger man andre af disse enkelte sammensatte Tal-Ord: saaledes er Ordet elleve, det samme som ti og een; Tretten som ti og tre, Tyve er to Gange ti, tredive, tre Gange ti. Denne Maade at sammensætte Tal-Ordene, er bekiendt under Navn af det decadiske Tal-System eller Ti-Tal Systemet. De ved Eenhedens Tgientagelse frembragte første Ti Mængder, betegnes nemlig ved de nylig nævnte usammensatte Ord; siden gaaer man frem ved Sammensætning, indtil man faaer ti Tiere, som benævnes med Ordet Hundrede, og nu sammensættes de allerede bekiendte indtil man faaer ti Hundreder som nævnes med Ordet Tusinde. Ved Hielp af disse tolv nye enkelte Ord, kan man ved

Sammensættelser udtrykke en overmaade stor Mængde forskellige Tal-Begreber. Til at tilkiendegive endnu større Mængder, betiener man sig af Ordet Million, som betegner en Mængde af ti Gange hundrede Tusind; og Billion, som betegner ti hundrede Tusind Millioner ic.

Anmerk. Foruden den her forklarede Maade at tælle paa, gives der andre, f. Ex. at tælle til To; til Fem og til Fire ic. hvilke alle af forskellige have været brugte, og i større Bøger findes forklarede; men som jeg har troet her blot at burde nævne.

§. 14.

Til skriftlig at udtrykke disse Tal-Begreb, betiener man sig i stedet for Ord af følgende Tifre eller Tegn 1 (een), 2 (to), 3 (tre), 4 (fire), 5 (fem), 6 (seks), 7 (syv), 8 (otte), 9 (ni), 0 (Null). Ved Hielp af disse ti Tifre kan man betegne alle heele Tal, da det samme Tiffer kan betegne forskellige Tal-Begreb efter den forskellige Plads det har. Naar man tæller fra høire Side mod venstre, betegner det yderste Tiffer en vis Mængde Eenere, det andet Tiere, det tredie Hundreder, det fjerde Tusinder, o. s. v. Nullen bruges alene til at opfolde en tom Plads, og viser at der af den Klasse, hvis Plads det optager, ingen er tilstede. F. Ex. 7 betegner syv Eenheder, 74 en 4 Eenere og 7 Tifre eller fire og halvfierd-

fjerdsindstyve, 305 læses fem Genere, ingen Tiere og tre Hundreder, eller kortere tre Hundrede og fem. Den simpleste Maade at læse et ved mange Sifre udtrykt Tal var at læse fra høire mod venstre, da man veed at Sifrenes Værdi voxer og bliver ti Gange høiere for hver Plads de i den Orden rykke frem; men for hurtig at kunde læse en saadan Mængde Sifre fra venstre til høire behøver man blot, at afstælle dem fra høire og sætte ved hver tredie Siffer et Komma, og over det Tal, som følger næst det andet Komma, et Punct eller Streg, over det næst det fjerde Komma to Puncter o. s. v. da vil det Siffer med eet Punct eller Streg over, betyde Millioner, det med to Puncter Billioner, og man vil da uden Vanskelighed saavel kunde læse ethvert med Sifre skrevet Tal, som og kunde skrive ethvert givet: f. Ex.

7, 803, 438, 765, 902, 487, 604

læses: syv Trillioner, otte Hundrede og tre Tusinde, fire Hundrede og otte og tredive Billioner, syv Hundrede, fem og tredsindstyve Tusinde, ni Hundrede og to Millioner, og fire Hundrede og syv og firindstyve Tusind, sex Hundrede og fire.

Anmærk. Denne vigtige Opfindelse at kunde aned 10 Sifre skrive alle mulige Tal Begreb, har Herbert, (som siden blev Pave under Navn af Sylvester den anden) først gjort bekendt i Europa; at

Arithmetik. B Herbert

Gerbert har lært denne Kunst af Araberne, synes aldeles rimeligt, saavel af hans Breve, som og af den Maade hvorpaa Zifrene læses, der tydelig nok røber deres østerlandske Oprindelse.

§. 15.

Førinden disse nu bekjendte Tal-Zifre, bruge Mathematikerne for Rørheds Skyld, følgende Tegn:

Tillægnings Tegnet $+$ (plus) som læses ved det Ord og, og naar det sættes mellem toende Støttelser, betyder at de skal lægges sammen, f. Ex. $8 + 3$ læsesotte og tre.

Fradrægnings Tegnet $-$ (minus) betyder mindre og naar det sættes imellem 2 Tal, tilkiendegiver det, at det sidste skal trækkes fra det første, f. Ex. $12 - 4$ hedderotte fra tolv, v. tolv mindre endotte.

Gientagelses Tegnet \times , . læses ved Ordet Gange, og betegner naar det sættes mellem 2 Tal, at det eeneskal gientages saa ofte som det andet indeholder Eenheden, f. Ex. 8×3 er 8 igientaget 3 Gange.

Deelings Tegnet, $:$, som naar det sættes imellem 2 Tal, tilkiendegiver at man skal dele det første med det sidste : dele det første i saa mange lige-

ligestore Dele, som det første indeholder Eenheden.
f. Ex. $12 : 4$ hedder 12 skat deles i 4 lige Dele.

Lighed's Tegnet $=$, som viser, at de
Størrelser, imellem hvilke det sættes ere lige store
f. Ex. $5 + 3 = 8$ hedder 5 lagt til 3 er lig 8.

Ulighed's Tegnet $<$, som sættes imellem
ulige store Størrelser, med Spidsen mod den mind-
dre og Nabningen mod den større. f. Ex. $8 > 3$
betegner at 8 er større end 3; men $3 < 7$ betegner
at 3 er mindre end 7.

Om de almindelige Forandringer, der kan
foretages med Størrelser, eller de fire
Regnings-Arter i hele Tal.

§. 16.

Naar alle de adskilte Størrelser som efter
§ 4 ere Gienstænder for Tal-Videnskaben, kunde
ved simpel Tælling findes og bestemmes, da ind-
skrænkedes denne Videnskab blot til det her nu fort-
telig er fremsat, men da der gives mangfoldige
Tilfælde, hvor den simple Tælling deels vilde være
umulig og deels alt for vidtløftig, saa skal Arith-

metiken efter at have lært os Tallene og deres Natur, tillige lære os de Methoder, ved hvilke vi ved Hielp af visse givne og med Tal udtrykte Størrelser finde de ubekiendte, som derved bestemmes; denne Deel af Arithmetiken kaldes i Almindelighed Regne-Konst. Dens egentlige Opfindelses Methode bestaaer i at foretage adskillige Forandringer med de givne Tal, for at finde det søgte. Disse Forandringer ere sædvanlig bekiendte under Navn af Regnings-Arter.

Al Forandring, som kan foretages med en given Størrelse, maae enten gaae ud paa at formeere eller formindske den. Der ere altsaa kun tvende Hoved-Forandringer eller Regnings-Arter mulige, nemlig: Størrelsernes Formerelse og Formindskelse; men da Formerelsen kan skee paa to forskellige Maader, og Formindsnelsen ligeledes, saa har man antaget fire saadanne Forandringer eller Regnings-Arter. Hvoraf de tvende vise hvorledes en Størrelse kan formeres og de to hvorledes den formindskes. Som oversees let saaledes:

| | |
|---|---|
| Addition v. Sammen- lægning Tals Formerelse | <u>summerende. Tal</u> $8 + 5 + 3 + 4 = 20$ Summen |
| | <u>Factorer</u> 8×5 v. $(8 \cdot 5) = 40$ Product |
| Multiplication v. Igientagelse | 8 8 8 8 |
| Subtraction v. Fradragning | <u>Minuenden</u> <u>Subtrahenden</u> $20 - 8 = 12$ differentz v. Forskiel |
| Formind- kelse | <u>Dividend</u> <u>Divisor</u> $20 : 4 = 5$ Quotient |
| Division v. Deelning | 4 <hr/> 16 4 <hr/> 12 4 <hr/> 8 4 <hr/> 4 4 <hr/> 0 |

Addition bestaaer i at formere en Størrelse ved at legge andre ligeartede Størrelser der-
til, og det hele derved udbragte kaldes Summen.

Multiplication formerer en given Størrelse
ved at igientage den saa ofte, som et givet Tal
til-

tilfiendegiver, de givne Tal kaldes Faktorer, og det udbragte Produkt.

Subtraction formindsker en given Størrelse ved at trække en anden given ligeartet Størrelse derfra, den der skal formindskes, kaldes Minuenden, og den der skal fradrages Subtrahenden, det tilbageblevne Differens.

Division lærer at formindske en Størrelse, ved at fradrage en anden given Størrelse saa ofte det er muligt. Den givne Størrelse som skal formindskes, kaldes Dividenden, den der skal fradrages Divisor, og det Tal som viser hvor ofte Divisor kan drages fra Dividenden, kaldes Quotient.

§. 17.

Efter saaledes at have fremsat de nødvendige Forklaringer (Grundsætningerne skal siden blive anførte) kommer jeg nu til næiere at giennemgaae de i forrige § nævnte fire Regnings-Arter:

At addere flere forskellige med Tal udtrykte Størrelser, er altsaa at finde et Tal, som udtrykker den samme Mængde af Eenheder, som de flere forskellige tilsammensat. Men da en ved en udtrykt Størrelse allene kan formeres ved at legge
lige,

ligeartede Størrelser dertil, saa indsees let at Summen altid vil indeholde samme Classe af Eenheder, som de summerende Tal. Saaledes vil flere Genere sammenlagte udgjøre en Sum af Genere; flere Tiere en Sum af Tiere o. s. v.

For at kunde hurtigt udøve Additionen, fordrer nødvendig at man veed Summen af ethvert Par af de ni enkelte Tal, dette findes enten ved at tælle paa Fingrene eller ved at skrive saa mange Streger eller Punkter som der ere Eenheder i de Tal, der skal adderes, og sammenstille dem. Veed man dette, findes Summen af de sammenfattede Tal let paa følgende Maade: Man ordner de givne Tal saaledes, at Generne komme under Generne, Tiere under Tiere o. s. v.; tæller derpaa hver Klasse sammen for sig; og samler endelig disse enkelte Summer til een Hoved-Sum. Til Exempel vilde vi antage at følgende Tal skulde adderes: 874, 1359, 7486. disse givne Tal ordnes da som nylig er sagt, og naar nu hver Klasse af Eenheder tælles for sig, har man nitten Genere, syve Tiere, femten Hundreder, og otte Tusinder, som samlede udgjøre Summen Ni Tusende syv Hundrede og Fjorten, eller og saaledes:

874
 1359
 7486

 19 Genere
 20 Tiere
 15 Hundreder
 8 Tusinder

 9719

Generne sammenlagte
 udgiøre 19, men efter §.
 13 udgiøre ti Genere en
 Tier, de 9 skrives derfor
 paa Genernes Plads, og
 den eene Tier tegnes eller
 legges strax til Tierne,
 man faar da 21 Tiere som
 udgiøre 2 Hundrede og en
 Tier o s. f.

Til Lettelse i Sammentællningen kan man be-
 mærke ved et Punct eller Streg hvor ofte man
 kommer til ti, og sadledes paa en let Maade erin-
 dre hvor mange man fra den optalte Classe af Een-
 heder har at legge til den følgende, f. Ex.

7.8 6.4.

3.8.7

5 9.8.

3 0 7 6.

9.8.7

1 2 9 1 2

Ved at sammentælle den
 første Classe eller Genere,
 har jeg 7 og 6 er 13, det
 er tre Genere og en Tier
 med et Punct, ved sex an-
 mærker jeg, at jeg har en
 Tier henlagt, og tæller vi-

dere ikke 13 og 8 men 3 og 8 er 11, her gøres nok et
 Mærke og tælles videre, 1 og 7 er 8 og 0 4 er
 12 som er 2 over ti, der gøres igien et Punct,
 jeg har nu to Genere og tre Tiere som de tre Punct-
 ter

ter udvise, og saaledes fortfares alle Classerne igiennem.

Paa denne Maade vil man med Hurtighed og Fethed kunde iværksætte Additionen, naar man kun som forhen er sagt, ved Summerne af de 9 enkelte Tal. Den simpleste og bedste Prøve paa Additionen er at regne det samme Exempel flere Gange, saaledes at man een Gang tæller fra neden opad, og en anden Gang fra oven og ned, saaer man da ved begge Tællinger samme Sum, kan man med al Rimelighed slutte at man har adderet rigtig. Ved meget vidtløftige Additioner kan man dele de opgivne summerende Tal i flere Dele, og summere hver Deel og siden sammenlægge partial Summerne. som:

3245

7897

598

1034

12774

876

958

3279

426

5539

Totalt 18319

8357

Transport 18313

8357

943

875

 10175

28489 — 28489

og naar man da efter at have sammentalt de enkelte Summer, under et sammentæller det heele, tiener det tillige som Prøve paa Additionens Rigtighed.

§. 18.

De Tal, om hvis Addition vi hidtil have talt, kaldes ubenævnte, efterdi de blot udtrykke en Mængde af Enheder uden at bestemme deres Art eller Bessaffenhed (§ 3) naar derimod tillige haves Hensyn til Enhedens Art, kaldes Tallet benævnt. Saadanne benævnte Tal adderes paa samme Maade som de ukendte, naar man allene veed, hvad Forhold de forskiellige Member staae i til hinanden, og hvor mange af den ringere Sort der gaae paa den høiere. Saaledes for at funde addere forskiellige Summer Penge, som efter den her brugelige Inddeling, i Almindelighed udtrykkes ved Rigsdaler, Mark, Stilling, er det nødvendigt at vilde at 1 Rd. er sex Mark og 1 Mark sex

ten

ten Skilling. Man skriver da de opgivne summerende Laf under hinanden og tæller først Skillingerne sammen, og undersøger hvor mange Mark de samlede Skillinge udgiøre, de overfløede Skillinge, som ikke udgiøre en Mark tegnes paa Skillingers Plads, og Markerne mærkes for at lægges til de sammmentatte Marker, der igjen gives til Rigsdaler, f. Ex. at addere:

48 Rd. 3 Mk. 12 Sk.

53 — 4 — 14 —

81 — 2 — 10 —

13 — 5 — 8 —

29 — 7 — 13 —

154 Rd. 1 Mk. 9 Sk.

Skillingerne sammenlagte udgiøre 57, da nu 16 Skilling udgiør 1 \mathcal{D} , saa findes ved at prøve hvor ofte 16 indeholdes i 57 (hvilket saalænge Divisionen ikke er lært, kan erfares under Skillingers Sammenlægning ved med et Punct eller Komma at mærke hver Gang man naaer sexten,) at 57 \mathcal{S} er 3 \mathcal{D} og 9 \mathcal{S} , de 9 \mathcal{S} skrives paa Skillingernes Plads, og de 3 \mathcal{D} lægges til Markerne, som sammenlagte blive 19, nu er 6 \mathcal{D} en Rigsdaler, altsaa ere de 19 \mathcal{D} , 3 Rd. og 1 \mathcal{D} , den eene Mark skrives paa Markernes Plads, og de tre Rigsdaler adderes til Rigsdalerne paa den i forrige \S forklarede Maade.

§. 19.

At subtrahere et mindre Tal fra et større;
 sker ved at tage saa mange Enheder fra det større
 som der indeholdes i det mindre, ved de enkelte
 Tal sker det som ved Additionen er forklaret § 17,
 og ved de sammensatte paa følgende Maade:

Man ordner Tallene som ved Addition, nemlig
 Einerne i Subtrahenden under Einerne i Mi-
 nuenden, Tierne under Tierne o. s. v. Man be-
 gynder da Subtractionen fra Einerne, og fortfa-
 rer siden med de høiere Classer, træffer det nu at
 der af en vis Classe er et større Antal i Subtra-
 henden end i Minuenden, saa da et større Tal ikke
 kan tages fra et mindre, saa tager jeg af den næste
 Classe, som altid efter § 14. er ti Gange høiere i
 Værdi een Enhed, som udgjør ti af dem hvorfra
 jeg skulde subtrahere, disse legges til de forrige, og
 nu tværksættes Gradragningen, dette kaldes i Al-
 mindelighed at laane een, som er ti; til Ex. lad
 8976 subtraheres fra 21348 de skrives da under
 hinanden:

$$\begin{array}{r} 21348 \\ - 8976 \\ \hline 12372 \end{array}$$

Nu subtraheres 6 Genere fra 8 Genere, der
 bliver da to til Rest, som skrives under Stregen
 paa

paa Tjenernes Plads; syv Tiere skulde trækkes fra fire Tiere, men da det ikke gaaer an, laanes een af Hundrederne som er ti Tiere, disse lagde til de 4 udgiøre 14 Tiere, og nu trækkes de 7 derfra der bliver da syv Rest som skrives paa Tjernerne Plads under Stregen, og saaledes fortfares med de øvrige Classer. Med en Punkt eller Streg bemærkes de Tal hos hvilke det saakaldte Laan er gjort, for at erindre at de ere bleven formindskede en Enhed i deres Værdi. Findes et Null paa den Plads hvor man skulde laane, da maae man gaae det forbi og laane hos det følgende saaledes: jeg skal fradrage 897 fra 304.06

897

29509

jeg skulde her laane en Tier, men finder ingen, jeg laaner da en Hundreder, som er ti Tiere, af disse laaner jeg een som er ti Tjener, og Subtractionen skeer nu som ovenfor er forklaret, af de ti Tiere brugtes kun een, de ni ere altsaa tilbage og sættes i Nullens Sted, og Subtractionen skeer da ligefrem, dette har givet Anledning til den praktiske Regel, at naar i Subtractionen et Null overspringes for at laane, bliver det at ansee derester som et Null-Tal.

Subtractionen med benævnte Tal ſkeer ſom med ubenævnte, naar man kun ſom i Afledning af Additionen § 18 er anmærket, fiender Inddelingen og Forholdet af de forſkiellige Ting, ſom ſkal ſubtraheres:

f. Ex. fra 2.8.6. Rd. 2. $\text{L} 8 \text{ S}$
 ſkal ſubtraheres $97 \text{ — } 5 \text{ — } 12 \text{ —}$

Reſt 188 Rd. 2 $\text{L} 12 \text{ S}$
 12 S ſkulde ſubtraheres fra 8 S, det gaar ikke an, her laanes da 1 L, ſom efter det bekiendte Forhold er 16 S, diſſe legges til de 8, og nu ſubtraheres 12 fra 24, og Reſten ſkrives under Strengen o. ſ. v.

Da man ved Subtractionen formindſker det ſtorre Tal ved at tage ſaa mange Eenheder bort ſom der er i Subtrahenden § 19, ſaa ſees let, at naar det overblevne (difference Forſkiel) legges til Subtrahenden, da udkommer Minuenden, og at ſølgelig en ſikker Prøve findes paa Subtractionen, naar Differenzen og Subtrahenden igjen adderes, og man da faaer Minuenden. Subtraction og Addition ere derfor modsatte Regnings-Arter, og den eene tlenet til at prøve den anden.

Foruden de Tilfælde i Subtractionen ſeg hidindtil har betragtet, hvor Minuenden i det Hele ſtedſe
 har

har været større end Subtrahenden; gides der og Tilfælde, hvor et større Tal virkelig skal trækkes fra et mindre; men disse Tilfælde forklares bedst tillige med Læren om modsatte Størrelser, hvortil den nærmest henhører, og forbigaaes derfor paa dette Sted.

§. 21.

At multiplicere er efter Forklaringen i § 16, at igientage den eene Faktor, saa ofte som Enheden indeholdes i den anden. Multiplicationen er altsaa ikke andet end en ofte igientagen Addition. Faktorerne kan enten være begge enkelte Tal, eller og begge sammensatte eller og een enkelt og een sammensat. I første Tilfælde findes Productet ved enten i Tanterne eller paa Papiret at lægge saa ofte den eene Faktor til sig selv; som den anden tallet begynder; f. Ex. hvormeget er 5×4 findes saaledes:

$\overset{I}{5} + \overset{II}{5} + \overset{III}{5} + \overset{IIII}{5} = 20$, jeg lægger nemlig Tallet fem til sig selv fire Gange; men for med Hurtighed og Letthed at kunde iværksætte Multiplicationen forudsættes, at man ved Producterne af de ni enkelte Tal, hvilke følgende Tabel, der blot ved Addition er forfærdiget, udviser.

| | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

I den første Rad staae de ni enkelte Tal, disse adderes til sig selv, og saaledes dannes den anden Rad, som legges til den første saa fremkommer den tredje, der igjen lagt til den første giver den fjerde o. s. v.

Vil man nu ved Hielp af denne Tabel vide Produktet af 5 og 7, da søge man i den første vertikale Rad fra venstre Tallet 5, og i den øverste horisontale Rad Tallet 7, den horisontale Rad som begynder med 5 og den vertikale som begynder med 7, vil da støde sammen, og det Tal som er fælles for dem begge er det søgte Produkt som her er 35.

§. 22.

Veed man nu enten ved Hielp af oven forklarede Tabel eller paa anden Maade Produkterne af de enkelte Tal, da findes Produktet af et sammen-

men

menfat og et enkelt ved at opløse det sammensatte i de enkelte hvoraf det bestaaer, multiplicere et hvert for sig med det givne Tal, og siden addere partial Produkterne f. Ex. naar 4589 skulde multipliceres med 9, da opløses dette sammensatte Tal i 4 Tusinder 5 Hundreder 8 Tiere 9 Eenere

4000 + 500 + 80 + 9 hver af disse igientages ni Gange, og jeg faaer

36000

4500

720

81

4500, 720, 81 disse

Produkter sammenlagte

udgiøre 41301 som er det

søgte Produkt

 41301

fortere saaledes: Ni Gange ni Eenere er 81 Eenere

4589

9

som efter § 14 er 8 Tiere

og 1 Eener, den 1 skrives

paa Eenernes Plads og de

8 bemærkes, nu igienta-

ges de 8 Tiere 9 Gange, som gjør 72 Tier, hertil lægges de 8 som vare udfomne ved Eenernes Igientagelse, der bliver da 80 Tiere som netop udgiøre 8 Hundreder, med 0 bemærkes altsaa paa Tierens Plads, at der ingen er, og saaledes fortfares indtil den hele Multiplication er tilendebragt.

§. 23.

Er begge Faktorerne sammensatte Tal, da multipliceres paa den i forrige § forklarede Maade,

først med Tænerne, dernæst med Tierne o. s. f. men Produktet som fremkommer ved at multiplicere med Tierne, skrives paa Tiernes Plads, og det med Hundrederne paa Hundredernes Plads o. s. v., thi da f. Ex. $40 \text{ er } = 4 \times 10$, saa maae Productet som fremkommer ved at multiplicere med 40, blive 10 Gange saa høit, som ved at multiplicere med 4, og Formerelsen med 10 skeer efter Tal-Systemets § 14 forklarede Natur, ved at rykke Tal-Zifrene frem en Plads fra høire til venstre, naar dette iagttages, da kan de ved Multiplikation med Tæner, Tiere og Hundreder ic. frembragte enkelte Produkter ved Addition foreenes til et Hoved-Produkt, sæt til Ex. at 5478 skal multipliceres med 657, der er at Tallet 5478 skal igientages 600 Gange, og 50 Gange og 7 Gange, det skeer saaledes:

$$\begin{array}{r}
 5478 \\
 657 \\
 \hline
 38346 \\
 27390 \\
 32868 \\
 \hline
 3599046
 \end{array}$$

først multipliceres efter § 22 med de 7 Tæner, dernæst med de 5 Tiere, det udfomne Produkt 27390 rykkes frem en Plads fra høire mod venstre, da 5 ikke var Tæner, men egentlig 5×10 .

Su multipliceres med 6, og det da udfomne rykkes frem paa Hundredernes Plads, da de 6 ere ikke Tæner men 6×100 . Hvis man begynder

gynkte Multiplikationen med Hundrederne, da maatte Produkterne siden rykkes fra venstre til høire, efterdi de da blev ringere, og det vilde staae saaledes:

$$\begin{array}{r}
 5478 \\
 657 \\
 \hline
 32868 \\
 27390 \\
 38346 \\
 \hline
 3599046
 \end{array}$$

Tillæg 1. Til Lettelse i Multiplicationen med sammensatte Tal, tiener det ogsaa at opløse den Faktor, hvormed der multipliceres, (Multiplikator) i de Faktorer, hvoraf den er sammensat, og da multiplicere det givne Tal (Multiplicanden) først med den eene Faktor, og det derved fremkomne Produkt, med den anden f. Ex. 456×24 , i Steden for at igientage 456 fire og tyve Gange umiddelbar, saa opløses 24 i Faktorerne 6 og 4, og det givne 456 multipliceres først med 6, og det da udfomne igien med 4, hvorved det søgte Produkt rigtig erholdes; thi da 24 er 6×4 saa følger at Eenheden indeholdes ligesaa ofte i 6×4 som i 24. Formerelsen bliver altsaa det samme, om jeg igientager den givne Størrelse 24 Gange eller 6×4 Gange saaledes:

$$\begin{array}{r}
 456 \times 24 \\
 \hline
 6 \quad \underline{6 \times 4} \\
 \hline
 2736 \\
 4 \\
 \hline
 10944
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 456 \\
 24 \\
 \hline
 1824 \\
 912 \\
 \hline
 10944
 \end{array}$$

Tillæg 2. Findes i den Faktor, hvormed der multipliceres, Nuller, da multipliceres alene med de øvrige Sifre og Nullerne forbigaaes, thi at gentage en Størrelse ingen Gang, giver naturligvis intet Produkt, dog passes at de ved de øvrige Sifre frembragte partial Produkter rykkes hen mod venstre paa deres behørig Plads.

Har fremdeles enten den eene eller begge Faktorer Nuller yderst mod høire, da forrettes Multiplicationen med de øvrige Sifre som om ingen Nuller vare, og naar disse partial Produkter ere ad-
derede, sæies til Hoved-Produktet saa mange Nuller som der vare i begge Faktorerne, for Exempel.

$$32000 \times 4700.$$

$$\begin{array}{r}
 32000 \\
 4700 \\
 \hline
 224 \\
 128 \\
 \hline
 250400000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5094 \\
 708 \\
 \hline
 40752 \\
 35658 \\
 \hline
 3606552
 \end{array}$$

§. 24.

Multiplikationen med benævnte Tal vil uden synderlig Vanskelighed forstaaes, naar man erindrer, at den eene Faktor altid maae være, eller dog ansees for et ubenævnt Tal, thi at multiplicere med 3 Rd. er jo en Umulighed; thi hvad vilde det sige at igientage en Ting 3 Rd. Gange, og saaledes med ethvert benævnt Tal; jeg vil derfor alene oplyse det med et Exempel: Der forlanges at 548 Rd. 3 H 8 S skal multipliceres med 6, jeg kan da enten forvandle de givne Rigsdaler og Mark til Skilling, og efter det forhen forklarede multiplicere dem med 6, jeg faaer da Produktet i Skilling, men da saa store Summer i det daglige Liv ikke beregnes i Skilling, er det bequemere at forrette Multiplikationen ved hver enkelt Deel, saaledes 548 Rd. 3 H 8 S \times 6

6

 3291 Rd. 3 H S

de 8 S gientages 6 Gange, og jeg har 48 S , men da disse netop udgiøre 3 H , saa bliver i Produktet ingen Skilling, derpaa gientages de 3 H 6 Gange, og dertil lægges de ved Skillingernes Igientagelse udfomne 3 H , det bliver da 21 H som er 3 Rd. 3 H , de 3 H skrives paa Markernes Plads og Rigsdalerne glemmes for at lægges til det her

ud

udfommende Produkt. Hvorledes Multiplicationen kan prøves, skal ved Divisionen blive forklaret.

§. 25.

At dividere er efter den § 16 givne Forklaring ikke andet, end oftere at igientage Subtractionen med et og samme Tal; for altsaa at kunde iærksætte dette, behøvedes allene at kunde subtrahere, f. Ex. $24 : 6$; her skal efter Forklaringen 24 formindstes, ved at trække 6 saa ofte derfra som muligt, og det findes saaledes:

Jeg anmærker med et Komma eller Streg hver Gang 6 trækkes fra 24, og disse Streger sammentælles siden, og jeg erholder da Quotienten.

$$\begin{array}{r}
 24 \\
 \underline{6 \quad 1} \\
 18 \\
 \underline{6 \quad 2} \\
 12 \\
 \underline{6 \quad 3} \\
 6 \\
 \underline{6 \quad 4} \\
 0
 \end{array}$$

Saa simpel og rigtig som denne Maade er, saa vidtløftig er den allerede i smaae Tal, end lige i større. Man har derfor andre Maader, indrettede efter det decadiske Tal-System, som siden skal forklares. Da et Tal maae kunde trækkes saa ofte fra et andet som det indeholdes deri, saa bestaaer

Divi-

Divisionen i Følge Forklaringen ogsaa i at under søge hvor ofte en given Størrelse (Divisor) indeholdes i en anden given Størrelse (Dividenden), da nu allene ligeartede Størrelser kan indeholdes i hinanden, saa følger at Dividend og Divisor maae altid være ligeartede Størrelser, og Quotienten vil da blive et ubenæmnt Tal; der indeholder Eenheden saa mange Gange som Divisor indeholdes i Dividenden.

Men der maae og Tilfælde, hvor Divisionen gaar ud paa at dele Dividenden i saa mange ligestore Dele, som Divisor tilfældigvis giver, Divisor maae da være et ubenæmnt Tal, og Quotienten ligeartet med Dividenden. Saa ofte som Eenheden da indeholdes i Divisor maae Quotienten indeholdes i Dividenden.

Af disse fremsatte Forklaringer følge

- 1) at naar Divisor er 1, bliver Quotienten det samme som Dividenden
- 2) at naar Divisor er lige stor med Dividend, bliver Quotienten $= 1$. —
- 3) er Dividenden 0 bliver Quotienten, hvad end Divisor er altid 0
- 4) er derimod Divisor 0, bliver Quotienten en uendelig stor Størrelse, (hvorom i det følgende skal handles).

§. 26.

At dividere et Tal med et andet, stærkstsaa uden Vanskelighed ved Hielp af den § 21 anførte Tabel, saa længe Dividenden er mindre end 100, og Divisor et af de ni enkelte Tal. f. Ex. $30 : 6 = 5$. Af Tabellen veed man at $6 \times 5 = 30$. $30 : 30$ indeholder 6 saa ofte som 5 indeholder Eenheden, nu spørges her hvor ofte 6 indeholdes i 30, eller hvor ofte 6 kan trækkes fra 30, intet er da flarere, end at naar 30 frembringes ved 5 Gange at igientage 6, saa maae ogsaa 6 kunde trækkes 5 Gange fra 30, og 5 er da den søgte Quotient.

Er Dividenden et høiere Tal, men Divisor et af de enkelte Tal, iværksættes Divisionen ved at opløse Dividenden i Dele, dividere hver Deel for sig, og siden addere partial Quotienterne. f. Ex. $6369 : 3$ nu er $6369 = 6000 + 300 + 60 + 9$, først prøves nu hvor ofte 3 indholdes i 6000, men da 6000 er $= 6 \times 1000$ og 3 indholdes 2 Gange i 6, saa følger at det i 6000 indeholder 2000 Gange, i 300 paa samme Maade 100 Gang, og i 60, 20 Gange og endelig i 9, 3 Gange.

Partial Quotienterne $2000 + 100 + 20 + 3$, som sammenlagte udgiøre den egentlige Quotient $= 2123$.

Efter det berøbte Tal-System's Natur sker dette lettere ved strax at hensejtte Quotienterne; da Stedet vil give dem deres Værdie, forrige Exempel vil da staae saaledes:

$$3 \overline{) 6369} \mid 2123$$

6

3

3

6

6

9

9

0

Man sætter Divisor foran, og ved en Streg skiller den fra Dividenden, som ligesledes med en Streg indsluttes fra høire Side, bag hvilken Quotienten hensejttes, nu begynder med Divisionen fra venstre, og prøves hvor ofte 3 indeholdes i 6, af Tabellen ved man

at det er 2 Gange, 2 hensejttes paa den til Quotienten bestemte Plads, og faaer ved det at de følgende Tal 1—2—3 ved Divisionens Fortsættelse hensejttes paa høire Side deraf, den Værd af Tusinde som det bør have, siden de 6 ikke vare Eenere men Tusinder; og saaledes fortsættes med Hundreder, Tiere og Eenere.

Naar baade Dividenden og Divisor ere sammensatte Tal, sker Divisionen egentlig paa samme Maade, med nogle Forandringer som best oplyses ved et Par Exempler:

først med Tænerne, dernæst med Tierne o. s. f. men Produktet som fremkommer ved at multiplicere med Tierne, skrives paa Tiernes Plads, og det med Hundrederne paa Hundredernes Plads o. s. v., thi da f. Ex. $40 \text{ er } = 4 \times 10$, saa maae Productet som fremkommer ved at multiplicere med 40, blive 10 Gange saa høit, som ved at multiplicere med 4, og Formerelsen med 10 skeer efter Tal-Systemets § 14 forklarede Natur, ved at rykke Tal-Zifrene frem en Plads fra høire til venstre, naar dette iagttages, da kan de ved Multiplikation med Tæner, Tiere og Hundreder ic. frembragte enkelte Produkter ved Addition foreenes til et Hoved-Produkt, sæt til Ex. at 5478 skal multipliceres med 657, der er at Tallet 5478 skal igientages 600 Gange, og 50 Gange og 7 Gange, det skeer saaledes:

$$\begin{array}{r}
 5478 \\
 657 \\
 \hline
 38346 \\
 27390 \\
 32868 \\
 \hline
 3599046
 \end{array}$$

først multipliceres efter § 22 med de 7 Tæner, dernæst med de 5 Tiere, det udfomne Produkt 27390 rykkes frem en Plads fra høire mod venstre, da 5 ikke var Tæner, men egentlig 5×10 .

Nu multipliceres med 6, og det da udfomne rykkes frem paa Hundredernes Plads, da de 6 ere ikke Tæner men 6×100 . Hvis man begynder

gynkte Multiplikationen med Hundrederne, da maatte Produkterne siden rykkes fra venstre til høire, efterdi de da blev ringere, og det vilde staae saaledes:

$$\begin{array}{r}
 5478 \\
 657 \\
 \hline
 32868 \\
 27390 \\
 38346 \\
 \hline
 3599046
 \end{array}$$

Tillæg 1. Til Lettelse i Multiplicationen med sammensatte Tal, tiener det ogsaa at opløse den Faktor, hvormed der multipliceres, (Multiplikator) i de Faktorer, hvoraf den er sammensat, og da multiplicere det givne Tal (Multiplicanden) først med den eene Faktor, og det derved fremkomne Produkt, med den anden f. Ex. 456×24 , i Steden for at igientage 456 fire og tyve Gange umiddelbar, saa opløses 24 i Faktorerne 6 og 4, og det givne 456 multipliceres først med 6, og det da udfomne igjen med 4, hvorved det søgte Produkt rigtig erholdes; thi da 24 er 6×4 saa følger at Eenheden indeholdes ligesaa ofte i 6×4 som i 24. Formerelsen bliver altsaa det samme, om jeg igientager den givne Størrelse 24 Gange eller 6×4 Gange saaledes:

$$\begin{array}{r}
 456 \times 24 \\
 \hline
 6 \quad \underline{6 \times 4} \\
 \hline
 2736 \\
 4 \\
 \hline
 10944
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 456 \\
 24 \\
 \hline
 1824 \\
 912 \\
 \hline
 10944
 \end{array}$$

Tillæg 2. Findes i den Faktor, hvormed der multipliceres, Nuller, da multipliceres alene med de øvrige Sifre og Nullerne forbigaaes, thi at gientage en Størrelse ingen Gang, giver naturligviis intet Produkt, dog passes at de ved de øvrige Sifre frembragte partial Produkter rykkes hen mod venstre paa deres behørigte Plads.

Har fremdeles enten den eene eller begge Faktorer Nuller yderst mod høire, da forrettes Multiplicationen med de øvrige Sifre som om ingen Nuller vare, og naar disse partial Produkter ere adderede, sæies til Hoved-Produktet saa mange Nuller som der vare i begge Faktorerne, for Exempel.

$$32000 \times 4700.$$

$$\begin{array}{r}
 32000 \\
 4700 \\
 \hline
 224 \\
 128 \\
 \hline
 250400000
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5094 \\
 708 \\
 \hline
 40752 \\
 35658 \\
 \hline
 3606552
 \end{array}$$

§. 24.

Multiplicationen med benævnte Tal vil
 uden synderlig Vanskelighed forstaaes, naar man
 erindrer, at den eene Faktor altid maae være, eller
 dog ansees for et ubenævnt Tal, thi at multipli-
 cere med 3 Rd. er jo en Himulighed; thi hvad vilde
 det sige at igientage en Ting 3 Rd. Gange, og saa-
 ledes med ethvert benævnt Tal; jeg vil derfor al-
 lene oplyse det med et Exempel: Der forlanges at
 548 Rd. 3 L 8 S skal multipliceres med 6, jeg
 kan da enten forvandle de givne Rigsdaler og Mark
 til Skilling, og efter det forhen forklarede mul-
 tiplicere dem med 6, jeg faaer da Produktet i
 Skilling, men da saa store Summer i det dag-
 lige Liv ikke beregnes i Skilling, er det beqvem-
 mere at forrette Multiplicationen ved hver enkelt
 Deel, saaledes 548 Rd. 3 L 8 S \times 6
6

3291 Rd. 3 L 1 S

de 8 S gientages 6 Gange, og jeg har 48 S , men
 da disse netop udgaaere 3 L , saa bliver i Produk-
 tet ingen Skilling, derpaa gientages de 3 L 6
 Gange, og dertil lægges de ved Skillingernes Igien-
 tagelse udfomne 3 L , det bliver da 21 L som er
 3 Rd. 3 L , de 3 L skrives paa Markernes Plads
 og Rigsdalerne glemmes for at lægges til det der
ud

udkommende Produkt. Hvorledes Multiplicationen kan prøves, skal ved Divisionen blive forklaret.

§. 25.

At dividere er efter den § 16 givne Forklaring ikke andet, end oftere at igientage Subtractionen med et og samme Tal; for altsaa at kunde iværksætte dette, behøvedes allene at kunde subtrahere, f. Ex. $24 : 6$; her skal efter Forklaringen 24 formindskes, ved at trække 6 saa ofte derfra som muligt, og det findes saaledes: 24

Jeg anmærker med et Rumma eller Streg hver Gang 6 trækkes fra 24, og disse Streger sammentælles siden, og jeg erholder da Quotienten.

$$\begin{array}{r}
 24 \\
 \underline{6} \quad 1 \\
 18 \\
 \underline{6} \quad 2 \\
 12 \\
 \underline{6} \quad 3 \\
 6 \\
 \underline{6} \quad 4 \\
 0
 \end{array}$$

Saa simpel og rigtig som denne Maade er, saa vidtløftig er den allerede i smaae Tal, end sige i større. Man har derfor andre Maader, indrettede efter det decadiske Tal-System, som siden skal forklares. Da et Tal maae kunde trækkes saa ofte fra et andet som det indeholdes deri, saa bestaaer

Divi-

Divisionen i Følge Forklaringen ogsaa i at under søge hvor ofte en given Størrelse (Divisor) indeholdes i en anden given Størrelse (Dividenden), da nu allene ligeartede Størrelser kan indeholdes i hinanden, saa følger at Dividend og Divisor maae altid være ligeartede Størrelser, og Quotienten vil da blive et ubenæmnt Tal; der indeholder Eenheden saa mange Gange som Divisor indeholdes i Dividenden.

Men der maae og Tilfælde, hvor Divisionen gaaer ud paa at dele Dividenden i saa mange ligestore Dele, som Divisor tilkiendegiver, Divisor maae da være et ubenæmnt Tal, og Quotienten ligeartet med Dividenden. Saa ofte som Eenheden da indeholdes i Divisor maae Quotienten indeholdes i Dividenden.

Af disse fremsatte Forklaringer følge

- 1) at naar Divisor er 1, bliver Quotienten det samme som Dividenden
- 2) at naar Divisor er lige stor med Dividend, bliver Quotienten $= 1$. —
- 3) er Dividenden 0 bliver Quotienten, hvad end Divisor er altid 0
- 4) er derimod Divisor 0, bliver Quotienten en uendelig stor Størrelse, (hvorom i det følgende skal handles).

§. 26.

At dividere et Tal med et andet, sker altsaa uden Vanskelighed ved Hielp af den § 21 anførte Tabel, saa længe Dividenden er mindre end 100, og Divisor et af de ni enkelte Tal. f. Ex. $30 : 6 = 5$. Af Tabellen veed man at $6 \times 5 = 30$. $30 : 30$ indeholder 6 saa ofte som 5 indeholder Eenheden, nu spørges her hvor ofte 6 indeholdes i 30, eller hvor ofte 6 kan trækkes fra 30, intet er da flarere, end at naar 30 frembringes ved 5 Gange at igientage 6, saa maae ogsaa 6 funde trækkes 5 Gange fra 30, og 5 er da den søgte Quotient.

Er Dividenden et høiere Tal, men Divisor et af de enkelte Tal, iværksættes Divisionen ved at opløse Dividenden i Dele, dividere hver Deel for sig, og siden addere partial Quotienterne. f. Ex. $6369 : 3$ nu er $6369 = 6000 + 300 + 60 + 9$, først prøves nu hvor ofte 3 indholdes i 6000, men da 6000 er $= 6 \times 1000$ og 3 indholdes 2 Gange i 6, saa følger at det i 6000 indeholder 2000 Gange, i 300 paa samme Maade 100 Gang, og i 60, 20 Gange og endelig i 9, 3 Gange.

Partial Quotienterne $2000 + 100 + 20 + 3$, sem sammenlagte udgiøre den egentlige Quotient $= 2123$.

Efter det berøbte Tal-System's Natur ſkeer dette lettere ved ſtrax at henſætte Quotienterne; da Stedet vil give dem deres Værdie, forrige Exempel vil da ſtaa ſaaledes:

$$3)6369|2123$$

6

3

3

6

6

9

9

0

Man ſætter Diviſor foran, og ved en Streg ſkiller den fra Dividenden, ſom ligeledeſ med en Streg indſluttet fra høire Side, bag hvilken Quotienten henſettes, nu begyndes med Diviſionen fra venſtre, og prøves hvor ofte 3 indeholdes i 6, af Tabellen veed man

at det er 2 Gange, 2 henſættes paa den til-Quotienten beſtemte Plads, og ſaaer ved det at de følgende Tal 1—2—3 ved Diviſionens Fortſættelſe henſættes paa høire Side deraf, den Værd af Tuſinde ſom det bør have, ſiden de 6 ikke vare Tænermen Tuſinder; og ſaaledes fortſættes med Hundreder, Tiere og Tæner.

Naar baade Dividenden og Diviſor ere ſammenſatte Tal, ſkeer Diviſionen egentlig paa ſamme Maade, med nogle Forandringer ſom beſt oplyſes ved et Par Exempler:

1) 233550 skal divideres med 54, opsættes saaledes:

$$\begin{array}{r}
 54 \overline{) 233550} \quad | \quad 4325 \\
 \underline{216} \\
 175 \\
 \underline{162} \\
 135 \\
 \underline{108} \\
 270 \\
 \underline{270} \\
 \dots
 \end{array}$$

Først undersøges hvor ofte 54 indeholdes i 2, som ere 2×100000 det indeholdes ikke deri, og af den Klasse bliver altsaa ingen i Quotienten; derpaa prøves 54 i 23 men da 23 endnu er mindre end 54 kan det ikke indeholdes nogen Gang

deri, og af den Klasse bliver følgelig i Quotienten endnu ingen; man maae altsaa tage de 3 Sifre 233, og prøve hvor tit 54 deri indeholdes (i saadanne Tilfælde slutter man temmelig rigtig, men dog ikke altid, at saa ofte det første af Divisors Tal som her 5, indeholdes i de 2 første af Dividenden som her 23, saa ofte indeholdes ogsaa de øvrige af Divisor i de øvrige dertil hørende af Dividenden) da nu 5 indeholdes 4 Gange i 23 saa tegnes 4 som Quotient, derpaa multipliceres den hele Divisor med Quotienten og Productet 216 skrives under de 3 første Tal af Dividenden og subtraheres derfra, der bliver da tilbage 17. Vi erfarede saaledes at 54 kan træffes 4 Gange fra 233 og der bliver 17 tilbage, hvorfra 54 ikke kan subtraheres, men da de 233 ere Tusinder saa bliver de 4 i Quotienten ogsaa

Tusin-

Tusinder, de 17 overblevne Tusinde ansees som 170 Hundrede og dertil sætes de nu nedflyttede 5, og jeg spørger nu: 54 i 175 hvilket findes, som ogsaa er viist ved at see hvor tit 5 indeholdes i 17, nemlig 3 Gange, Tallet 3 tegnes nu i Quotienten næst 4, og Divisor multipliceres nu med 3, og Produktet 162 subtraheres fra 175 hvorved erfares at 54 indeholdes 3 Gange i 175, og at der bliver 13 hvorfra de 54 ikke kan subtraheres, da de 175 vare Hundreder, bliver de 3 i Quotienten ogsaa Hundreder, de 13 overblevne ansees som 130 Tiere og dertil legges de 5 nedflyttede, og nu spørges igien paa samme Maade, hvor ofte 54 indeholdes i 135, saaledes fortsaeres indtil alle Sifrene ere nedflyttede og Quotienten funden at vare, ingen Hundred Tusinder, ingen Titusinder, 4 Tusinder, 3 Hundreder, 2 Tiere og 5 Eenere 4325.

2) Lad være givet 7654 at dividere med 37, det opsættes og behandles som forrige Exempel:

Dog anmærkes at da jeg efter at have divideret Hundrederne og nedflyttet de 5 Tiere til de fra Hundrederne overblevne 2 som er 20 Tier, saa har jeg i alt 25 Tiere, da nu 25 er

$$\begin{array}{r}
 37 \overline{) 7654} \quad 206 \\
 \underline{74} \\
 25 \\
 \underline{00} \\
 254 \\
 \underline{222} \\
 32
 \end{array}$$

mindre end 37, kan 37 ikke indeholdes dert noget Gang, det bemærkes i Quotienten med et Null, for at de øvrige Sifre kan faae deres rigtige Plads og dermed forbundne Værd, 37 skulde nu multipliceres med 0, men at igientage en Størrelse ingen Gang giver intet til Produkt, og naar intet fradrages bliver det samme uforandret som før var, det var altsaa unyttigt at skrive de 2 Nuller og de udelades derfor i Almindelighed, da det Tal af næstfølgende Classe strax nedskyttes og Operationen igien begyndes. Efter nu at have divideret Tænerne, bliver en Rest af 32, som endnu skulde divideres med 37, 0: det skulde deles i saa mange Dele som Divisor har Enheder, og een af disse tilføres Quotienten; hvorledes dette meer forklares siden ved Brøkmægningen, her er det nok at sige, at man ved at skrive Quotienten $206\frac{2}{37}$ viser at Divisionen ikke gandske er fuldført.

Naar Divisor bestaaer af 3, 4 eller flere Sifre, meer Divisionen paa samme Maade som er vist med 2, og behøver ingen videre Forklaring.

§. 27.

Hvad § 23 er anmærket angaaende Multiplicationen, det samme gælder og om Divisionen at den kan udføres naar Divisor kan opløses i Faktorer ved at dividere først med den ene Faktor,

og den da udfomne Quotient igien med den anden Faktor, f. Ex. naar 576 skulde divideres med 12: deles i 12 lige Dele, da skeer det ved at dele det først i 3 Dele, og hver af disse igien i 4, og følgelig forrettes Divisionen ved at dividere først med 3 og det da udfomne igien med 4, efterdi

$$3 \times 4 \text{ er } = 12. \quad 576 : 12 = 48. \quad \text{og}$$

$$576 : 3 = 192 \quad \text{men} \quad 192 : 4 = 48.$$

Naar Dividenden lader sig opløse i Faktorer, da divideres den eene Faktor med Divisor og den da udfomne Quotient multipliceres med den anden Faktor f. Ex. $48 : 3 = 16$, nu er $48 = 6 \times 8$ og $6 : 3 = 2$, denne Quotient 2 multipliceres med den Faktor 8, og der udfommer da 16, som er den søgte Quotient.

Rigtigheden af denne Fremgangsmaade indsees saaledes: jeg vil i det anførte Exempel vide hvor ofte 3 indeholdes i 48, da nu $48 = 6 \times 8$, saa følger at 3 maae indeholdes 8 Gange saa ofte i 48 som det indeholdes i 6, da det nu indeholdes i 6 to Gange, saa maae det indeholdes $8 \times 2 = 16$ Gange i $8 \times 6 = 48$.

Af det nu om Multiplicationen og Divisionen forklarede indsees let, at naar et Produkt divideres med den eene Faktor, udfommer den anden som Quotient; og naar Quotienten multipliceres med Divisor udfommer Dividenden. Multiplication

og Division tiene derfor til at prøve hinanden, og ere modsatte Regnings-Arter.

At dividere benævnte Tal, skeer aldeles paa samme Maade, som om de ubenævnte er forklaret, naar kun, som ved de forrige Regnings-Arter er anmærket, Forholdet af de forskiellige Størrelser er bekendt, et eeneste Exempel vil være nok, der forlanges at 3846 Rd. 3 E 12 ß skal deles i fire lige Dele \therefore divideres med 4.

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 3846 \text{ Rd. } 3 \text{ E } 12 \text{ ß}} \\ \underline{961 \text{ Rd. } 3 \text{ E } 15 \text{ ß}} \end{array}$$

Divisionen begyndes med Rigsdalerne, og efter de i foregaaende § forklarede Metoder, findes at 4 indeholdes 961 Gange i de givne Rigsdalere, men at der bliver to tilovers hvori fire ikke indeholdes, disse 2 Rigsdaler opløses til Mark, og lægges til de 3 som vare givne, nu divideres de 15 Mark med 4, der bliver 3 til Quotient og 3 E tilovers som gøres til Skillingen, disse legges til de 12, og de da udfomne 60 ß divideres med 4, hvorvedder udkommer 15 ß .

Anmærk. Naar Divisor og Dividenden bestaa af mange Sifre, er det fordeelagtigt ved Addition at søge det todobbelte, tredobbelte, firdobbelte xc. af Divisor, da man ved at sammenligne disse Produkter af Divisor med de forskiellige Dele af Dividenden let vil finde Quotienten s. Ex.

| | | | |
|--------------|-------|------------|------|
| 1 Gang) 4523 | 4523 | 2457237348 | 5432 |
| 4523 | 22615 | | 76 |
| 2 Gang) 9046 | 19573 | | |
| | 18092 | | |
| 3 —)13569 | 14817 | | |
| | 13569 | | |
| 4 —)18092 | 12483 | | |
| | 9046 | | |
| 5 —)22615 | 34374 | | |
| | 31661 | | |
| 6 —)27138 | 27138 | | |
| | 27138 | | |
| 7 —)31661 | | | |
| | | | |
| 8 —)36184 | | | |
| | | | |
| 9 —)40707 | | | |
| | | | |

Naar man nu som her er færdig ved Addition har fundet det todbobbelte o. s. v. til det niobbelte Produkt af Divisoren, saa sammenligner man de første 5 Ziffer af Dividenden med disse forskellige Produkter af Divisor, og ser da at det femdobbelte er det højeste der kan trækkes deraf, fem er da det første Ziffer i Kvotienten, efter at dette femdobbelte er subtraheret, og det følgende Ziffer 3 er nedflyttet, eftersøges, hvilken af Divisors Produkter, der nærmer sig mest til det Tal 19573 der nu skal divideres, og man finder da at det er det firdobbelte, som da hen-sættes og subtraheres deraf, o. s. f.

§. 28.

Naar et heelt Tal lader sig ved et andet Tal saaledes dividere, at intet bliver tilovers, og at
fol.

følgelig Quotienten efter § 26 ogsaa er et heelt Tal, saa siges Dividenden at være et defeligt Tal og Divisor og Quotienten ere dets aliquote Dele. Et Tal dertimod, som ikke lader sig ved noget andet Tal saaledes dividere, kaldes et prim-Tal (udeleligt Tal). Den største Divisor (aliquote Deel) for et heelt Tal er Tallet selv; naar altsaa et Tal er en aliquot Deel af et andet, er det tillige den største fælles Divisor eller det største fælles Maal for dem begge; Tal som have et fælles Maal, siges at være indbyrdes dekelige, de Tal, som hver for sig selv ere dekelige, men intet fælles Maal have, kaldes indbyrdes prim Tal.

Den største fælles Divisor (fælles Maal) for tvende Tal findes paa følgende Maade:

Det større af de givne Tal divideres med det mindre, det da overblevne bruges som Divisor, og dermed divideres den forrige Divisor indtil det enten gaar op, da den sidste brugte Divisor er Tallenes største fælles Maal, eller og der tilsidst bliver een tilovers, som viser at Tallene intet fælles Maal have, og følgelig ere Prim-Tal, f. Ex. Tallene 10051 og 966 være givne, hvis største fælles Maal man vil finde, man gaar da frem saaledes:

$$\begin{array}{r} 966 \overline{) 10051} \mid 10 \\ \underline{966} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 391 \overline{) 966} \mid 2 \\ \underline{782} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 184 \overline{) 391} \mid 2 \\ \underline{368} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \overline{) 184} \mid 8 \\ \underline{184} \end{array}$$

23 er da den største fælles Divisor: Rigtigheden af denne Fremgangsmaade indsees let: 23 findes at gaae op i 184, altsaa og i $2 \times 184 + 23$ (conf. § 26 og 27) $= 391$, følgelig og i $2 \times 391 + 184 = 966$, og endelig naar det gaaer op i 966 gaaer det og op i $10 \times 966 = 9660$, og da det forhen var bevist at gaae op i 391 maae det og gaae op i $9660 + 391 = 10051$, hvilket kan saaledes let oversees:

$$10051 = 10 \times 966 + 391$$

$$966 = 2 \times 391 + 184$$

$$391 = 2 \times 184 + 23$$

$$184 = 8 \times 23.$$

Om Brøk i Almindelighed, og de fire
Regnings-Arter med Brøk.

§ 29.

En Brøk er een eller flere af en Enheds Lige store
Dele. Naar altsaa et heelt deles i et vist Antal
Lighelede.

D

af

af lige Dele, og af disse tages een eller nogle, saa har man en Brøk, eller et brudet Tal; som skrives med to Tal-Sifre saaledes: $\frac{2}{3}$ og læses to tredie Dele. Nævner kaldes det Tal, som tilkiendegiver Delenes Beskaffenhed, eller siger hvor mange Dele det Hele er deelt i, som her Tallet 3. Tæller det, som tilkiendegiver Delenes Tal i det nærværende Tilfælde, eller viser, hvor mange af de ligestore Dele der ere tagne, som i den nævnte Brøk Tallet 2. Af denne Forklaring følger:

1) At enhver Brøk kan ansees som en Quo-
tient, frembragt ved at dividere Tælleren med Næv-
neren f. Ex. $\frac{4}{5}$ betegner at en Enhed er deelt i 5
ligestore Dele, hvoraf tages 4, og følgelig $\frac{4}{5} =$
 $4 \times \frac{1}{5}$, men naar 4 skal divideres med 5 \therefore un-
dersøges hvor ofte 5 indeholdes i 4, da opløses efter
§ 27, 4 i 4×1 , i 1 indeholdes 5 $\frac{1}{5}$ Gang, og
altsaa i 4×1 , $4 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ Gang. Enhver Di-
vision kan derfor udtrykkes som Brøk, og i Steden
for at skrive $20 : 5$, skrives $\frac{20}{5}$.

2) Ved benævnte Tal, kan ethvert Tal som
betegner en ringere Sort af Størrelser, ansees som
en Brøk af den høiere Sort, hvorunder det indbe-
fattes; f. Ex. 2 Mark er $= \frac{2}{6}$ Rigsdaler, 8 Sk
er $= \frac{8}{16}$ Mark, thi da een Rigsdaler er 6 Mark
og Marken 16 Sk., og følgelig 2 Mk. $= \frac{2}{6}$ Rd.

3) Brøken kan ansees som et Tal, thi, skøndt den ikke indeholder en Mængde af hele Eenheder, saa indeholder den dog en Mængde af den hele Eenheds lige store Dele, der her kan ansees som Eenheder. Nævneren bestemmer allene af hvad Art de Dele ere, som Tælleren opregner, Brøken kan derfor ansees som et benævnt Tal.

4) Ere Tæller og Nævner lige store, da er Brøken's Værdi det samme som den hele Eenheds; thi tænker man sig et Heelt deelt i et vist Antal af lige Dele, som Nævneren bestemmer, og jeg tager alle disse Dele, hvilket maae skee naar Tælleren er samme Tal som Nævneren, faaer jeg upaatvibeleligt det Hele, f. Ex. $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7} = 1$. Man kan endog tage flere Dele, end der gaae paa een Eenhed, og i saa Tilfælde bliver Tælleren større end Nævneren f. Ex. $\frac{12}{7}$ her tænkes et Heelt deelt i 7 Dele, og af disse Dele skal tages 12, jeg maae altsaa for at funde dette, tænke mig endnu en Eenhed af samme Slags ligeledes deelt, og Brøken $\frac{12}{7}$ er da det samme som $1 + \frac{5}{7}$. Saadanne Brøf, hvor Tælleren enten er ligestor med Nævneren eller endog større, kaldes uegentlige, uægte Brøf (fractiones spuria, impropriae). De forvandles ved at dividere Tælleren med Nævneren, enten gandske til hele Tal eller til hele og brudne (blandede) Tal.

Naar Tælleren derimod er mindre end Rævneren, kaldes Brøken ægte eller egentlig (*propria, genuina*).

§. 30.

En Brøks Værd formeres, naar dens Tæller gøres større eller Rævneren mindre; og formindskes naar Tælleren gøres mindre eller Rævneren større.

Beviis: Jo flere af samme Slags Dele der tages, jo større et heelt maae nødvendig erholdes, da nu Tælleren bestemmer Antallet af Delene, saa følger, at naar den forhøies, skal et større Antal af samme Dele tages, og altsaa er Værdien formeret f. Ex. $\frac{7}{5} > \frac{4}{5}$ thi af de lige store Dele tages nu 7 i stedet for 4, da nu $7 > 4$ saa er $\frac{7}{5} > \frac{4}{5}$. Ved en mindre Rævner tilkiendegives at det hele skal deles i færre Dele; men deraf følger, at Delene selv maae blive større; og naar jeg nu af disse større Dele tager ligesaa mange som før af de mindre; maae nødvendig det da udbragte være større end tilforn f. Ex. $\frac{2}{3} > \frac{2}{12}$ thi den Ting, der før var deelt i 12 Dele, er nu kun deelt i 3, og selvfølgelig hver Deel 4re Gange saa stor. Ligeledes indsees, at naar Tælleren bliver mindre, det er, færre af de samme Dele tages, bliver Værdien mindre; og naar Rævneren bliver større o:

det

det Hele deles i flere Dele, blive Delene mindre, og naar nu Antallet ikke forøges, bliver Værdien følgelig formindsket. Heraf følger:

1) At naar en Brøks Tæller bliver multipliceret eller Rævneren divideret med et heelt Tal, bliver Brøksens Værdi saa mange Gange forøget, som Tallet indeholder Eenheder, s. Ex.

$$\frac{8}{2} = 4 \times \frac{2}{2} \text{ thi } 8 \text{ er } = 4 \times 2$$

$$\frac{2}{3} = 4 \times \frac{2}{12} \text{ thi } 3 = 12 : 4.$$

2) At naar Tælleren bliver divideret, eller Rævneren multipliceret med et heelt Tal, bliver Brøksens Værdi saa mange Gange mindre, som Tallet indeholder Eenheder.

3) At en Brøk kan multipliceres med et heelt Tal paa to Maader: enten ved at multiplicere Tælleren eller dividere Rævneren med det givne Tal; ligeledes kan den divideres med et givet heelt Tal paa 2 Maader: enten ved at dividere Tælleren, eller ved at multiplicere Rævneren dermed.

4) At Brøksens Værdi bliver uforandret naar dens Tæller og Rævner multipliceres eller divideres med et og samme Tal; thi i det Tælleren multipliceres, formeres Brøksens Værdi saa mange Gange som Tallet hvormed den multipliceres indeholder Eenheder, og naar Rævneren multipliceres med samme Tal, bliver den paa samme Maade formindsket, og følgelig ligemeget baade forøget og for

førmindsket og altsaa uforandret. Ved at dividere Tæller og Nævner med et og samme Tal, skeer Formerelsen og Førmindskelsen ligeledes i samme Grad.

§. 31.

At forkorte en Brøk, er at udtrykke den samme Værdi, ell. r samme Deel af det Hele med ringere Tal: dette skeer ved at dividere Brøken's Tæller og Nævner med samme hele Tal; thi da Quotienten maae i Følge § 25 altid blive mindre end Dividenten, saalænge Divisor er et heelt Tal, saa maae der ved denne Division udfomme mindre Tal til Tæller og Nævner, og i Følge foregaaende § bliver Værdien den samme, og Forkortningen er skeet f. Exempel,

$$\frac{12}{20} = \frac{12 : 4}{20 : 4} = \frac{3}{5}$$

Alle Brøke hvis Tæller og Nævner ere indbyrdes delelige Tal, kan altsaa forkortes ved at divideres med en af deres fælles Divisorer, og saa meget muligt, ved at divideres med deres største fælles Divisor, der søges efter § 28, ere de derimod indbyrdes Prim-Tal, finder ingen Forkortning Sted. Ved at opløse saavel Tæller som Nævner i Faktorer, og udlette de, som da findes i begge, kan Forkortningen og skee f. Ex. $\frac{32}{120} = \frac{4 \times 8}{8 \times 15} = \frac{4}{15}$

Anm.

Mark. Naar man til et givet Tal 430 vil finde Faktorerne, saavel de enkelte som selv ere Prim-Tal, som de sammensatte, der ere komne ved at multiplicere de enkelte med hinanden, eller med, sammensatte da seer det saaledes:

$$\begin{array}{r|l} 430 & 2 \\ 215 & 5-10 \end{array}$$

$$43 \mid 43 \cdot 86 = 215 \cdot 430$$

Man dividerer Tallet med den mindst muelige Faktor, som her 2, og sætter den ved høire Side af Tallet, som skilles derafra ved en perpendicular Streg, Quotienten 215, sættes under Tallet selv, derpaa divideres 215 med sin mindste Faktor 5 der tegnes paa høire Side af Stregen under den forrige Faktor 2, Quotienten 43 tegnes under Tallet, 43 er et prim-Tal, og kan ikke divideres, de Tal paa høire Side af Stregen ere nu de enkelte Faktorer, og de som ved at multiplicere dem med hinanden kan frembringes, ere de sammensatte.

§. 32.

Da Rævneren bestemmer Brøkens Art, og i Folge § 16, allene ligeartede Størrelser kan adderes, saa følger at allene de Brøke som have eens Rævnere kan adderes, og at det for at foretage Addition med Brøke er nødvendigt, at kunde bringe forskellige Brøke til eens Benævning: forandre dem, saa at de have samme Rævner, uden at deres Værd er enten forøget eller formindsket, dette seer:

a) ved at multiplicere alle de givne Brøks Rævnere med hinanden

b) ved

b) ved at multiplicere enhver af Tællerne med det samme Tal, hvormed dens Nævner er multipliceret, f. Ex. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{7}$ bringes saaledes til eens Benævning:

$$\frac{2}{3} \times (4 \times 7) = \frac{56}{84}$$

$$\frac{3}{4} \times (3 \times 7) = \frac{63}{84}$$

$$\frac{5}{7} \times (3 \times 4) = \frac{60}{84}$$

$$\frac{2}{3} \times (4 \times 7) = \frac{56}{84}$$

$$\frac{3}{4} \times (3 \times 7) = \frac{63}{84}$$

$$\frac{5}{7} \times (3 \times 4) = \frac{60}{84}$$

Ved at multiplicere Nævnerne, erholdes samme Nævner overalt (da samme Faktorer altid give samme Produkt) som kaldes en fælles Nævner; men da Brøkens Værdi derved er efter § 30 bleven formindsket, saa maae, for at erstatte dette, enhver Tæller multipliceres med det samme Tal, da Værdien saaledes er (see § 30) aldeles uforandret. Denne Maade at søge en fælles Nævner, vil, naar de givne Brøke ere mange og høie, blive vidtløftig, og den fundne Nævner et meget høit Tal.

Til Lettelse i den praktiske Regning, betiener man sig derfor af følgende Methode: Man opløser alle Nævnerne i deres enkelte Faktorer, multiplicerer disse med hinanden, og finder saaledes et Tal, hvori alle Nævnerne kan gaae op. Dette

anses

ansees som en fælles Nævner, og nu undersøges ved Division, hvor ofte enhver af de givne Rævnere indeholdes i den fundne fælles Nævner, og med de ved denne Division fundne Quotienter multipliceres Tællerne f. Ex.

| 120 fælles Nævner | | | |
|-------------------|----|-----|-------------------|
| $\frac{2}{3}$ | 40 | 80 | $\frac{80}{120}$ |
| $\frac{5}{12}$ | 10 | 50 | $\frac{50}{120}$ |
| $\frac{11}{20}$ | 6 | 66 | $\frac{66}{120}$ |
| $\frac{7}{8}$ | 15 | 105 | $\frac{105}{120}$ |
| $\frac{1}{4}$ | 30 | 30 | $\frac{30}{120}$ |
| $\frac{13}{24}$ | 5 | 65 | $\frac{65}{120}$ |

$$3 \overline{) 3 \text{---} 12 \text{---} 20 \text{---} 8 \text{---} 4 \text{---} 24}$$

$$4 \overline{) 1 \text{---} 4 \text{---} 20 \text{---} 8 \text{---} 4 \text{---} 8}$$

$$2 \overline{) 1 \text{---} 1 \text{---} 5 \text{---} 2 \text{---} 1 \text{---} 2}$$

$$1 \text{---} 1 \text{---} 5 \text{---} 1 \text{---} 1 \text{---} 1$$

enkelte Faktorer

$$3 \times 4 \times 2 \times 5 = 120$$

Rigtigheden af denne Fremgangs-Måde indsees let, ved Division findes de enkelte Faktorer af alle Rævnerne her at være 3, 4, 2, 5, disse multiplicerede, give Produktet 120, hvori ikke blot de enkelte men og de af dem sammensatte Faktorer maae gaae op. Nu findes ved Division med den første Brøks Nævner 3, at den indeholdes 40 Gange i fælles Nævneren, Tælleren 2 multipliceres nu med 40, for at Brøksens Værdie ikke skal for

forandres, og Brøken $\frac{12}{120}$ er $= \frac{1}{10}$, og saaledes med alle de øvrige Brøker. Ere de givne Brøkers Nævner alle indbyrdes Primtal, kan denne Maade ikke bruges.

§. 33.

Ere Brøkerne efter forrige § bragte til eens Benævning, da skeer Addition og Subtraction, blot ved at Tællerne adderes og subtraheres, da Nævnerne blive gandske uforandrede; thi da Brøker kan ansees som benævnte Tal, hvis Art bestemmes ved Nævneren, saa kan disse ligesaa lidet adderes eller subtraheres, som ved benævnte Tal de Ord, der bestemme Størrelsernes Art f. Ex. Rigsdaler, Pund, Lod ic. Saaledes er Summen af $\frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$, af $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{7}$ som efter forrige § ere $= \frac{56}{84} + \frac{63}{84} + \frac{60}{84} = \frac{179}{84}$ som er en uegentlig Brøk (see § 29) og $= 2\frac{1}{4}$.

Differencen findes ligeledes: f. Ex. $\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ (§ 31). I det Tilfælde at der i Minuenden er Heele og Brøk, og Brøken i Subtrahenden er større end i Minuenden, da maae der laanes en Heel, som efter Brøkens Natur er saa mange Dele som Nævneren angiver f. Ex. at subtrahere $4\frac{1}{7}$ fra $8\frac{2}{7}$ skeer saaledes:

$$\begin{array}{r}
 3 \times 5 = 15 \\
 8 \overline{) 7 \times 5 = 35} \\
 4 \times 3 = 28 \\
 8 \overline{) 5 \times 7 = 35} \\
 \hline
 3\frac{1}{3}
 \end{array}$$

efterat Brøkerne her ere
 bragte til eens Benævning,
 skulde jeg subtrahere $\frac{2}{3}$
 fra $\frac{1}{3}$ eller 28 fra 15, jeg
 låner da een af de 8 Dele,
 som er $\frac{3}{3}$ disse legges til
 de $\frac{1}{3}$, og udfomme da $\frac{1}{3}$, nu subtraheres 28
 fra 50, og den da fundne Difference 12 er Tæller
 for den søgte Brøk som er $\frac{1}{3}$ siden subtraheres de
 hele, som forhen er vist.

§. 34.

At multiplicere et heelt Tal med en Brøk,
 er efter §. 31, at igientage saa stor en Deel af
 det hele Tal som Brøken er af Eenheden: v.
 dele det givne Tal i saa mange lige store Dele, som
 Nævneren angiver, og tage deraf saa mange som
 der ere Eenheder i Tælleren. Det skeer ved at
 dividere det givne Tal med Brøkens Nævner og
 multiplicere det med dens Tæller, eller i en omvendt
 Orden s. Ex. $20 \times \frac{3}{4} (20 : 4) \times 3 = 5 \times 3$
 $= 15$. Thi at multiplicere $20 \times \frac{3}{4}$ er at igien-
 tage de $\frac{3}{4}$ af 20, jeg deler først 20 i fire Dele ved
 at dividere med 4, og af disse Fierbedele tages 3
 som skeer ved at multiplicere 5 med 3. Forlanges
 derimod at $\frac{1}{4}$ skal multipliceres med 20: igienta-
 ges 20 Gange, da skeer det (§ 30, 3.) ved at multi-
 plicere

placere Tælleren 3 med 20, og man faaer da $\frac{60}{4}$.
 Tom er en egentlig Brøk $= 15$. - Da det samme
 Produkt saaledes erholdes ved at multiplicere baade
 20 med $\frac{3}{4}$, og $\frac{3}{4}$ med 20, saa har følgende Fakto-
 rernes Orden ingen Indflydelse paa Produktet.
 Videre indsees, at Produktet, som fremkommer,
 naar et Tal multipliceres med en egentlig Brøk,
 altid bliver mindre end Multiplicanden; thi det er
 ikke en blot Multiplication, men en sammensat
 Regning, da der først divideres med Nævneren og
 siden multipliceres med Tælleren; saa længe altsaa
 Tælleren er mindre end Nævneren (hvilket er Til-
 fældet i alle egentlige Brøke) vil Produktet blive
 mindre end Multiplicanden; at multiplicere et Tal
 med $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ er følgende ikke andet end at dividere
 Tallet med 2, 3, 4, thi da 1 gjør ingen Multi-
 plication, behøver det ikke at sies.

§. 35.

Brøk multipliceres med Brøk, naar Tæl-
 ler multipliceres med Tæller og Nævner med
 Nævner, f. Ex. $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$ thi at multipli-
 cere med $\frac{2}{5}$ er efter forrige § at igientage de to
 femte Dele af den givne Størrelse, og skeer ved
 at dividere med 5 og multiplicere med 2, naar jeg
 nu multiplicerer Nævneren 4 med Nævneren 5,
 bliver Brøken $\frac{3}{4}$ virkelig divideret med 5 (§ 30. 3)

og i det Tællerne multipliceres, bliver den ligeledes multipliceret med 2, og altsaa Multiplicationen rigtig fuldført.

Skal blandede Tal multipliceres med hinanden, forandres de beqvemt til uegentlige Brøf og multipliceres da paa den nyelig forklarede Maade. f. Ex. $3\frac{1}{4} \times 5\frac{2}{3} = \frac{13}{4} \times \frac{17}{3} = \frac{221}{12} = 18\frac{5}{12}$. Er Multiplicanden et Tal, som bestaaer af 2 eller flere Sifre, er det beqvemmere at lade den blive uforandret, og blot gjøre Multiplicator til en uegentlig Brøf og da efter forrige § dividere med dens Nævner og multiplicere med Tælleren f. Ex.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 212\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}} \\ 70\frac{11}{12} \\ 16 \\ \hline 1134\frac{2}{3} \end{array}$$

Multiplicationen skeer ogsaa rigtig naar der først multipliceres med Multiplicators hele Tal og derpaa med Brøken, og partial Produkterne derefter adderes som i det anførte Exempel saaledes:

$$\begin{array}{r} 212\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{3} \\ 5 \\ \hline 12 \\ 1063\frac{3}{4} = 9 \\ 70\frac{11}{12} = 11 \\ \hline 1134\frac{2}{3} \end{array}$$

§. 36.

At dividere en Brøk med et heelt Tal, eller at dele den i et vist Antal lige Dele er forklaret § 30, 3. Her skal altsaa allene læres: Hvorledes Divisionen skeer, naar Dividenden er et heelt Tal og Divisor en Brøk; og naar baade Dividenden og Divisor ere Brøk. Det første er efter den paa Division § 25 givne Forklaring at see, hvor ofte Brøken indeholdes i det givne Tal, dette faaes at vide ved at multiplicere det givne Tal med Divisors Nævner og dividere det udfomne med dens Tæller f. Ex.

$$\begin{array}{r} 20 : \frac{4}{5} \\ \underline{5} \\ 4) 100 \\ \underline{00} \\ 25 \end{array}$$

Beviis: Her spørges, hvor ofte $\frac{4}{5}$ indeholdes i 20, nu er $\frac{4}{5} = 4 \times \frac{1}{5}$, jeg undersøger derfor først,

hvor ofte $\frac{1}{5}$ indeholdes i 20, ved at multiplicere 20 med 5; thi da $\frac{1}{5}$ er fem Gange mindre end Eenheden, og Eenheden indeholdes tyve Gange i 20, maae $\frac{1}{5}$ indeholdes deri fem Gange saa ofte, nemlig 100 Gange. Men jo større et Tal er, jo færre Gange maae det funde indeholdes i et andet Tal, $\frac{4}{5}$ kan altsaa ikke indeholdes i 20, saa ofte som $\frac{1}{5}$, men kun fjerde Parten saa mange Gange, det ved Multiplicationen udfomne Produkt 100, maae derfor igien divideres med 4, og den da udfomne Quotient 25 viser hvor ofte $\frac{4}{5}$ kan indeholdes i 20.

Heraf

Heraf indsees at ved at dividere med en egentlig Brøk, udkommer bestandig en Quotient, som er større end Dividenden, hvilket videre forklares af samme Grund, som ved Multiplicationen er anført § 34. At dividere med $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ &c. er nemlig intet andet end at multiplicere med 2, 3, 4. f. Ex. $20 : \frac{1}{2} = 20 \times 2 = 40$. $15 : \frac{1}{3} = 15 \times 3 = 45$. $12 : \frac{1}{4} = 12 \times 4 = 48$.

§. 37.

Brøk divideres med Brøk, naar Dividenden multipliceres med Divisors Nævner og divideres med dens Tæller, hvilket skeer naar Divisors Tæller og Nævner ombyttes, og Dividenden dermed multipliceres f. Ex. $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$.

Bemærk: Spørgsmaalet ved at dividere Brøk med Brøk, er at see hvor ofte den ene Brøk som i det anførte Exempel $\frac{2}{5}$, indeholdes i den anden $\frac{3}{4}$; naar nu Dividenden $\frac{3}{4}$ multipliceres med den omfattede Divisor $\frac{2}{5}$, da bliver den derved multipliceret med Divisors Nævner og divideret med dens Tæller som just var det, der efter forrige § maatte skee, for at erfare hvor ofte Divisor indeholdtes i Dividenden.

Divisionen skeer ogsaa rigtig, naar Brøkerne bringes til eens Benævning, og deres

Tæl.

Tællere da blot divideres i hinanden f. Ex. $\frac{2}{3} : \frac{4}{7}$ er naar de bringes til eens Benævning efter § 32, $\frac{2}{3} : \frac{4}{7} = \frac{14}{21} : \frac{12}{21} = 14 : 12 = \frac{7}{6}$; thi da Brøf med eens Nævner ere ligeartede Størrelser, hvis Art bestemmes ved Nævneren, saa maae nødvendig den eene indeholdes i den anden saa ofte som dens Tæller indeholdes i den andens; ligesom 3 $\frac{1}{2}$ indeholdes i 6 $\frac{1}{2}$ 2 Gange, saa maae og $\frac{3}{4}$ indeholdes i $\frac{6}{4}$ 2 Gange, eller saa ofte som 3 indeholdes i 6.

Blandede Tal divideres med hinanden, ved at forvandles til uegentlige Brøf, og da behandles paa den nylig forklarede Maade, f. Ex. $2\frac{1}{3} : 1\frac{1}{4} = \frac{7}{3} : \frac{5}{4} = \frac{7}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{28}{15} = 1\frac{8}{15}$. Er Dividenden et Tal, som bestaaer af 2 eller flere Zifre, da indrettes allene Divisor til en uegentlig Brøf, og Divisionen skeer efter forrige §. f. Ex.

$$238\frac{4}{5} : 6\frac{1}{3} = 238\frac{4}{5} : \frac{19}{3}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 19 \overline{) 716\frac{2}{5}} \\ \hline 37\frac{6}{5} \end{array}$$

Anmærk. Ved at dividere 716 med 19 blev tilovers 13, disse maae gøres til femte Dele for at kunde legges til $\frac{4}{5}$, der bliver da i alt $\frac{67}{5}$ som divideres med 19 ved at multiplicere Nævneren (see § 30, 3).

Om at dividere med et Brøf

Grundsætninger (Axiomer).

§. 38.

De almindelige Grundsætninger, (§ 17) hvoraf de fleste Sandheder i Mathematiken udledes og bevises, hvor simple og fattelige de end ere, og hvor ofte de end i det daglige Liv anvendes, uden egentlig at fiendes, have dog for Begynderne et saa fremmet Udseende; at jeg har troet ikke at burde anføre dem sørend her; da og først i det efterfølgende deres egentlige Anvendelse finder Sted. Følgende ere de vigtigste:

- 1) Et heelt er lige stort med alle dets Dele tilsammentagne Ex. 1 Rd. \equiv 96 β 18 \equiv 8 + 5 + 2 + 3.
- 2) Et Heelt er større end enhver af dets Dele; og enhver Deel er mindre end det Hele. Ex. 1 Rd. $>$ 1 β . 18 $>$ 8; 1 β $<$ 1 Rd. 5 $<$ 18.
- 3) Lige store Størrelser kan sættes i Steden for hinanden Ex. 1 Rd. i Steden for 96 β ; 4 Quarter for 1 Alen.
- 4) Naar lige store Størrelser formeres eller formindskes med lige store Størrelser, og paa samme Maade, bliver det udkommende lige.

Ex. ved Addition (§ 17).

$$8 = 5 + 3$$

$$4 = 4$$

$$12 = 9 + 3$$

Subtraction (§ 19)

$$7 = 4 + 3$$

$$2 = 2$$

$$5 = 2 + 3$$

Multiplication (§ 21)

$$7 = 4 + 3$$

$$5 = 5$$

$$35 = 20 + 15$$

Division (§ 25)

$$24 = 16 + 8$$

$$4 = 4$$

$$6 = 4 + 2$$

5) Naar lige store Størrelser formeres eller formindses ved ulige store Størrelser, er det udkommende ulige stort; ligeledes naar ulige Størrelser formeres eller formindses ved lige store Størrelser.

Ex. $7 = 4 + 3$

$$5 > 2$$

$$12 > 6 + 3$$

$$8 = 5 + 3$$

$$2 < 3$$

$$16 < 15 + 9$$

$$8 = 5 + 3$$

$$2 < 3$$

$$6 > 2 + 3$$

$$20 = 12 + 8$$

$$5 > 4$$

$$4 < 3 + 2$$

6) Naar to Størrelser ere lige store eller ligedanne med en tredje, da ere de indbyrdes lige store eller ligedanne:

Ex.

$$\text{Ex. } 1 \text{ Rd.} = 96 \text{ \textit{ß}}$$

$$6 \text{ \textit{Rf.}} = 96 \text{ \textit{ß}}$$

$$\text{altsaa } 1 \text{ Rd.} = 6 \text{ \textit{R}}$$

7) Naar en Størrelse er større eller mindre end den eene af to lige store Størrelser, er den og større eller mindre end den anden.

$$\text{Ex. } 8 = 5 + 3, \text{ nu er } 9 > 8, \text{ altsaa } 9 > 5 + 3.$$

Om modsatte Størrelser.

§. 39.

Naar to Størrelser ere af den Art, at, naar de begge sammenlægges, den eene da bliver forøget med saa mange Eenheder, som den anden indeholder, faldes de, Størrelser af samme Betingelse (*qvanita ejusdem conditionis*) eller fortære overeenstemmende Størrelser f. Ex. 100 Rdlr. Formue og 30 Rd. Formue. 100 Rd. Gield og 30 Rd. Gield. Ere derimod to Størrelser af den Art, at, naar de begge sammentages, den eene derved gandske forsvinder, og den anden bliver saa mange Eenheder mindre, som den første indeholder; saa faldes de: Størrelser af modsat Betingelse (*qvanita contrariæ conditionis*) eller fortære modsatte Størrelser (*qvanita contraria*). Saadanne ere: Formue og Gield, Bevægelse fra

samme Punkt i modsat Direction, Stigen og Falden ic.

Man har vedtaget at betegne disse modsatte Størrelser med $+$ og $-$ og nævne dem bekræftende (positive) og nægtende (negative) saaledes at naar en vis Størrelse f. Ex. Formue betegnes med $+$ betegnes dens modsatte, Gield med $-$ saa at naar $+$ 8 Rd. betyder en Formue af 8 Rdlr., betyder $-$ 3 Rd. en Gield af 3 Rd. Dog er det almindelig vedtaget, at naar en bekræftende Størrelse, der skulde betegnes med $+$, enten staaer ganske allene eller i Begyndelsen af en Række, da udledes Tegnet. I sig selv ere alle Størrelser, for saavidt de ere noget, bekræftende og kan ikke kaldes nægtende uden i Sammenligning med andre. Det er derfor ligegyldigt hvilke Størrelser der gives Navn af bekræftende og nægtende, thi Formue er ligesaa vel en nægtende Størrelse naar det modsættes Gield, som Gield er nægtende naar det modsættes Formue. Ligeledes maae det forstaaes relativ (henfigtsmæssig) naar de nægtende Størrelser kaldes mindre end intet; thi kun for saavidt de modsættes de bekræftende, som ere mere end intet, kan de siges at være mindre end intet. Den, som uden at rie noget er 10 Rd. skyldig, hans Formue kan siges at være mindre end intet $0 - 10$ Rd., thi sæt at ham gives 10 Rd., da vil jo de

10 Rd.

10 Rd. Gield ophæve de bekomne 10 Rd., og hans Formue er $\equiv 0$, men den er jo dog større nu end førend den Tilvæxt af de bekomne 10 Rd., den var altsaa fra Begyndelsen mindre end intet. I sig selv derimod (absolut) betragtet kan ingen Størrelse siges at være mindre end intet, thi Gield er saavel en virkelig Størrelse som Formue, og hvad der er noget, kan ikke tillige være intet, end lige mindre end intet. Man maa derfor tage sig i Agt, at man ikke ved Navnet positiv her tænker sig, det virkelig reelle, og ved negativ altsaa det, som ikke er noget reelt, positiv bekræftende betyder her intet andet, end den af to modsatte Størrelser, som ved en Undersøgelse egentlig er Hoved-Stienstanden; Og dog er det i de fleste Tilfælde vilkaarligt, hvilken af to modsatte vi vil ansee som Hoved-Stienstand.

Anmærk. Man kan derfor ansee enhver nægtende Størrelse, som noget der skal fradrages, og en bekræftende som noget der skal tillegges, hvilket formentlig er Anledning til, at Tal, der i sig selv alle ere eensartede, ogsaa kan betragtes som modsatte Størrelser, naar man anseer det ene som en adderende, og det andet som en subtraherende, og derfor sætter foran hiin Additions Tegnet $+$ og foran denne Subtractions-Tegnet $-$.

§. 40.

Hidindtil have vi udtrykt enhver Størrelses Forhold til en anden af samme Art, der kan ansees som Eenhed (hvilket i Almindelighed benævnes med Tal) ved de bekjendte Tal-Sifre. Alle Størrelser lade sig vel paa denne Maade udtrykke ved Tal; men for mere Almindeligheds Skyld, og for at kunde udtrykke Størrelsen som Tal-endog naar Eenheden er ubestemt, betiener man sig af Bogstaver, især de smaa i det latinske Alphabet, og forestiller derved de forskjellige Mængder af forskellige Eenheder. Man kalder den Regnekunst, hvori man betiener sig af disse almindelige Tegn, almindelig Regnekunst eller Bogstav-Regning, ja vel og Algebra. Et Bogstav som et almindeligt Tegn kan betegne, saavel alle muelige Mængder, som Arter af Eenheder, f. Ex. *a* kan betyde 2 Rigsdaler 3 Børde 10. *b* ligeledes, det er altsaa vilkaarligt, hvilke Bogstaver man vælger, for at betegne visse Størrelser, men efter at have valgt dem, maa man, som let begribes, beholde de samme Bogstaver, til at betegne samme Størrelser under den hele Udførelse af den begyndte Regning.

Størrelser udtrykte ved forskellige Bogstaver ere derfor at ansee som uligeartede, og kan allene adderes og subtraheres formedelst de os allerede

rede

rede betiendte Tegn f. Ex. a og b er $\equiv a + b$ og Differencen af a og b er $\equiv a - b$.

Da Bogstaver betragtede som Multiplicatorer og altsaa som Tal (§ 21) tilfiiendegive en ubestemt Mængde Eenheder, saa følge at Multiplicationen heller ikke anderledes kan skee, thi at multiplicere a med b er at igientage Størrelsen a , b Gange, men da b , kan betegne forskellige Mængder af Eenheder skeer Igientagelsen ikke, men tilfiiendegives at den skal skee, ved at skrive $a \times b$.

Anmærk. Efter en almindelig Vedtægt udledes Multiplications-Tegnet imellem Bogstaver, og de skrives tæt op til hinanden, saaledes er $ab \equiv a \times b$, $aa \equiv a \times a$.

Ved Divisionen finder det samme Sted, og den skeer ved Hielp af Tegnet, eller ved at udtrykke Quotienten som Brøk f. Ex. at a skal divideres med b , det er deles i b lige Dele, lader sig ikke iværksætte, da det er ubestemt hvad Mængde af Eenheder b betegner: det tilfiiendegives derfor blot, at Delingen skal skee, ved at skrive $a : b$ eller $\frac{a}{b}$.

Saadanne med Bogstaver udtrykte Størrelser kan forbindes med Tal-Sifre enten formædelt Tegnene $+$ og $-$ f. Ex. $a + 8$; $9 + x$, $b - 7$; eller og uden Tegn, da Talletne enten sættes umiddelbar foran Bogstaverne som $7a$, $8b$, $9c$ de saa da Navn af Coefficienter, og angive, at Bogstaverne

derne dermed ere multiplicerede f. Ex. $7a$ et $\equiv 7 \times 1a \equiv 7 \times a$; eller og ved den øverste Kant af Bogstavets høire Side, som a^2 , b^3 , disse Tal kaldes Exponenter, og betegne at Bogstav-Størrelsen skal multipliceres med sig selv saa mange Gange som Exponenten indeholder Enheder f. Ex. $a^3 \equiv a \times a \times a$, $b^2 \equiv b \times b$.

Anmærk. Naar Coefficienten eller Exponenten er 1, udelades den saaledes er $a \equiv 1a$, $b \equiv b^1$.

§. 41.

Modsatte Størrelser, betragtede som saadanne, kan ikke være ligeartede, da de efter § 39 ikke ere overensstemmende; de kan altsaa egentlig ikke adderes (see § 16) og den udbragte Sum er ikke et Heelt, hvis Dele de summerende Størrelser ere. F. Ex. naar 100 Rd. Formue og 30 Rd. Gield adderes, saa er Summen 70 Rd. Formue, men 100 Rd. Formue kan ikke ansees som en Deel af 70 Rd. Formue.

Naar altsaa modsatte Størrelser skal adderes eller sammenlignes i Henseende til Quantiteten, saa maa de først ansees som ligeartede, og overensstemmende; ere de da begge lige store, vil Summen blive $\equiv 0$ (see definit. § 39) ere de derimod, som overensstemmende betragtede, allige, da hver Additionen naar det modsatte af den mindre sub-

tra-

traheres fra den større. f. Ex. 30 Rd. Formue +
100 Rd. Gield er \equiv 100 Rd. Gield — 30 Rd.
Gield \equiv 70 Rd. Gield.

$$\text{adder } \left\{ \begin{array}{r} - 100 \text{ Rd.} \\ + 30 \text{ Rd.} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{r} - 100 \\ - 30 \\ \hline - 70 \end{array} \right\} \text{ subtraher}$$

Summen af to modsatte Størrelser findes
altsaa i Almindelighed, ved at subtrahere den
mindre, modsat taget, fra den større; eller,
som det og pleier at udtrykkes, ved at subtrahere
den mindre fra den større og give det udfomne
det Tegn, den største Størrelse havde.

Da alle bekræftende Størrelser, ere ligear-
tede, som og de nægtende, saa seer deres Addi-
tion efter den § 17 forklarede Maade: f. Ex. 8 Rd.
Formue + 3 Rd. Formue er \equiv 11 Rd. For-
mue, ligeledes er 3 Rd. Giel + 4 Rd. Gield \equiv
7 Rd. Gield.

Flere med + og — forbundne Størrelser
udtrykte ved Tal og Bogstaver, vil nu altsaa let
kunne adderes f. Ex.

$$\begin{array}{rcl} \text{adder:} & 12 - 8 + 7 - 11 + 9 & = 9 \\ & - 8 + 5 - 3 + 8 - 6 & = -4 \\ & 7 - 4 + 2 - 7 + 5 & = 3 \\ & - 3 + 2 - 8 + 4 - 2 & = -7 \\ \hline & 8 - 5 - 2 - 6 + 6 & = 1 \end{array}$$

I den første vertikale Række samles de bekræftende Størrelser som udgøre 19 og de nægtende der er $\equiv -11$ men 19 og -11 adderede efter den nylig forklarede Regel, giver Summen $\equiv 8$. o. s. f.

Den hele Sum reduceres paa samme Maade til et eeneste Tal, som her bliver $\equiv 1$. Man kan og addere de horizontale Rækker hver for sig, og siden samle partial Summerne, som da vil udgøre det samme som de vertikale Rækers Sum.

Et Exempel med Bogstav Størrelser:

$$\begin{array}{r}
 \text{Adder:} \quad 3a - 4b + 5c - 2d \\
 \quad - 2a + 2b - 3c + 2f \\
 \quad - 4a + 3b - 4c + d \\
 \quad \quad - 7b + c - 2g \\
 \hline
 \quad - 3a - 6b - c - d + 2f - 2g
 \end{array}$$

Man ordner først Størrelserne, at de eensbenævnte komme lige under hinanden, derpaa adderes de efter de oven forklarede Regler; i det Tilfælde, at der ingen eensbenævnte Størrelser findes, da skeer Additionen blot ved at skrive Størrelserne med deres Tegn ved hinanden s. Ex.

$$\begin{array}{r}
 2a + 3b + 4c \\
 3g - 2h - 3f - 2m \\
 \hline
 2a + 3b + 4c - 3f + 3g - 2h - 2m
 \end{array}$$

§. 42.

Subtraction med modsatte Størrelser udtrykte ved Bogstaver og Tal seer: naar Tegnene ved ethvert Led i Subtractor forandres til det modsatte, og Størrelserne derpaa efter forrige § adderes.

$$\begin{array}{r}
 \text{Ex. fra } 2a - 3b + 5c - 4d \\
 \text{subtraher } \underline{a + b + c + d} \\
 \hline
 a - 2b + 6c - 5d
 \end{array}$$

Rigtigheden af denne Regel indsees saaledes: Ved Subtraction søges en Størrelse, som lagt til Subtractor udgør Minuenden; lad f. Ex. $5a$ være givne hvorfra $-3a$ skal subtraheres, saa søges en Størrelse som adderet til $-3a$ udgør $5a$, denne erholdes just naar $-3a$ forandres efter Reglen til $+3a$ og derpaa adderes til $5a$, thi man faaer da $8a$ som adderet til $-3a$ efter § 41 gior $5a$. Eller maaskee tydeligere paa denne Maade; For at kunde subtrahere en given Størrelse fra en anden, er det nødvendigt at den sidste maa indrettes saaledes, at den første kan blive en Deel deraf, og Subtractionen da foretages f. Ex. fra $8a$ subtraher $-5a$, nu indrettes $8a$ ved at tilføie $+5a$ og $-5a$ saa at $-5a$ er en Deel deraf, saaledes:

$$8a \equiv 8a + 5a - 9a$$

$$\begin{array}{r} + 5a \equiv - 9a \\ \hline \end{array}$$

$$13a \equiv 8a + 5a \equiv 13a$$

Et andet Exempel. subtraher $- 8$ fra 12

$$12 \equiv 12 + 8 - 8$$

$$\begin{array}{r} + 8 \equiv - 8 \\ \hline \end{array}$$

$$20 \equiv 12 + 8$$

§. 43.

Efter Multiplicationens Natur maa Multiplikator altid være et Tal (§. 21), der ere altsaa i Henseende til modsatte Størrelser Multiplication at mærke følgende fire Tilfælde:

1) Naar en bekræftende Størrelse multipliceres med et bekræftende Tal, da er Productet bekræftende, f. Ex. $+a \times +m \equiv +am$, $+7 \times +4 \equiv +28$.

Thi Productet kommer af Størrelsen $+7$ paa samme Maade som Tallet $+4$ kommer af Tallet 1 (§. 21), men da $+4$ kommer af $+1$ ved at lægge det til sig selv fire Gange, saa kommer Productet ved at lægge $+7$ til sig selv fire Gange, og er altsaa $+7 + 7 + 7 + 7 \equiv +28$.

2) Naar en nægtende Størrelse multipliceres med et bekræftende Tal, bliver Productet nægtende,

de, f. Ex. $-a \times +m = -am$ $-7 \times +4 =$
 -28 .

Da Tallet $+4$ kommer af $+1$ ved at igientage det fire Gange, maa Produktet frembringes ved at tage Størrelsen -7 fire Gange, og følgelig være $= -28$.

3) Naar en bekræftende Størrelse multipliceres med et nægtende Tal, er Produktet nægtende, saaledes er $+a \times -m = -am$; $+7 \times -4 = -28$.

At multiplicere $+7$ med -4 , er at frembringe et Produkt af $+7$ paa samme Maade som -4 er kommet af $+1$. Nu er Tallet -4 kommet af Tallet $+1$, ved at at igientage det fire Gange og betragte Produktet som et subtraherende Tal; følgelig frembringes det forlangte Produkt ved at igientage $+7$ fire Gange, og ansee den udfomne bekræftende Størrelse $+28$ som subtraherende, hvilket er det samme som en negativ Størrelse betragtet adderende (§. 42).

4) Naar en nægtende Størrelse multipliceres med et nægtende Tal, er Produktet bekræftende, f. Ex. $-7 \times -4 = +28$.

Tallet -4 kommer af $+1$, naar 1 multipliceres med 4 og det udfommende ansees som et subtraherende Tal, det søgte Produkt skal altsaa frembringes ved at igientage -7 fire Gange, og
 ansee

anseet det udkomne — 28 som en subtraherende Størrelse, men — 28 anseet som en subtraherende Størrelse er efter § 42 det samme som + 28 anseet som en adderende.

Heraf indsees nu den almindelige Regel: at ved at multiplicere bekræftende og nægtende Størrelser med bekræftende og nægtende Tal, faaer Produktet +, naar Faktorerne have eens Tegn, og — naar de have forskiellige.

Anmærk. Foruden det anførte Beviis lader denne Regel sig og saaledes oplyse, er det først tilstaaet, at $-5 \times +9$ giver — 45 hvilket efter Multiplicationens Natur let indsees, da bevises at $-7 + -5$ giver + 35 saaledes:

| | |
|-----------------------------|------------------|
| efter den § 38, 4. anførte | $-5 = -5$ |
| Grundsætning skal Produk- | $9 - 7 = 2$ |
| terne her blive lige men da | <hr/> |
| $-5 \times +9$ giver, som | $-45 + 35 = -10$ |

antages for beviist — 45, saa maa -7×-5 give + 35, da de udkommende Produkter ellers ikke bleve lige store.

§. 44.

Alle saavel med Tal som med Bogstaver udtrykte bekræftende og nægtende Størrelser, lade sig nu let multiplicere: Man multiplicerer nemlig enhver enkelt Størrelse i Multiplicanden med enhver enkelt i Multiplikator, saaledes at Tallene vir-

direktelig multipliceres, og Bogstaverne skrives uden Tegn ved hinanden (§ 40), for ethvert Produkt sættes Tegnet $+$ eller $-$ efter § 43. Disse enkelte Produkter adderes derpaa til sammen. f. Ex.

a) med Tal:

$$\begin{array}{r}
 12 - 8 + 7 - 6 = 5 \\
 7 - 4 = 3 \\
 \hline
 84 - 56 + 49 - 42 \quad 15 \\
 - 48 + 32 - 28 + 24 \\
 \hline
 36 - 24 + 21 - 18 = 15.
 \end{array}$$

b) med Bogstaver:

No. 1.

$$\begin{array}{r}
 a - x + y \\
 \quad b \\
 \hline
 ab - bx + by
 \end{array}$$

No. 2.

$$\begin{array}{r}
 a + b \\
 a + b \\
 \hline
 a^2 \text{ v. } aa + ab \\
 \quad ab + b^2 \text{ v. } bb \\
 \hline
 a^2 + 2ab + b^2
 \end{array}$$

No. 3.

$$\begin{array}{r}
 a - b \\
 a - b \\
 \hline
 a^2 - ab \\
 \quad - ab + b^2 \\
 \hline
 a^2 - 2ab + b^2
 \end{array}$$

No. 4.

$$\begin{array}{r}
 a + b \\
 a - b \\
 \hline
 a^2 + ab \\
 \quad - ab - b^2 \\
 \hline
 a^2 - b^2
 \end{array}$$

Anmærk. Da Bogstaver kan udtrykke alle mulige Størrelser, saa kan ved $a + b$ betegnes Summen af ethvert Par Størrelser, eller enhver Størrelse der bestaaer af 2 Dele (binomium) og altsaa er det udfomne Produkt $a^2 + 2ab + b^2$ et almindeligt Udtryk for Produktet af ethvert binomisk Størrelse multipliceret med sig selv. Ligeledes kan $a - b$ anses som Differencen af ethvert Par Størrelser og $a^2 - 2ab + b^2$ som en almindelig Form for Produktet, naar Differencen af 2 Størrelser multipliceres med sig selv. Ex. No. 4. giver ogsaa en almindelig Regel, at naar $a + b$ (Summen af to Størrelser) multipliceres med $(a - b)$ (Differencen af de samme) udfommer $a^2 - b^2$ (den første multipliceret med sig selv mindre end den anden ligeledes multipliceret med sig selv) om Anvendelsen af disse Sætninger vil i det følgende tales videre.

c) Med Tal og Bogstaver.

$$\begin{array}{r}
 8b - 4a + 3ac - 4g \\
 2a + 3b \\
 \hline
 16ab - 8a^2 + 6a^2c - 8ag \\
 24b^2 - 12ab + 9abc - 12bg \\
 \hline
 24b^2 + 4ab - 8a^2 + 6a^2c + 9abc - 8ag \\
 - 12bg
 \end{array}$$

§. 45.

Division med modsatte Størrelser, seer som med absolute Størrelser efter § 22, og i Henseende

de

de til Tegnene følges denne Regel: at naar Dividenden og Divisor have eens Tegn \div : ere begge bekræftende eller begge nægtende, faaer Quotienten $+$ eller bliver bekræftende; have derimod Dividend og Divisor forskellige Tegn faaer Quotienten $-$, eller bliver nægtende. Da Dividend, Divisor, Quotient og Eenheden, have samme Forhold til hverandre som Produkt, Multiplicand, Multiplikator og Eenheden (§ 27), saa følger, at det § 43 for Multiplications-Reglen førte Beviis, med den nødvendige Omfætning til- lige kan anvendes her.

Angaaende Bogstav-Størrelserne da er § 40 allerede erindret, at naar de ere forskellige, Divisionen da skeer allene ved Hielp af Tegn; men forekommer samme Bogstav som Faktor baade i Dividend og Divisor da hæve de hinanden, f. Ex. $ab : a = \frac{ab}{a} = b$. Udtrykket ab betegner, at Størrelsen b er igientagen et vist Antal Gange, som udtrykkes ved a , naar den nu skal divideres med a , det er, deles i saa mange lige store Dele, som a tilkiendegiver, saa følger, at Quotienten bliver b (§ 27), ligeledes er $a^2 : a = aa : a = a$, $cd : c = d$.

§. 46.

Er enten Dividenden en sammensat Størrelse, og Divisor et enkelt Tal; eller baade Divi-

denden og Divisor sammensatte Tal, da skeer Divisionen efter samme Fremgangsmaade som § 25 om hele Tals Division er forklaret; naar tillige erindres, hvad i foregaaende § i Henseende til Tegnene, og Bogstav-Størrelserne er anmærket. Begge Tilfælde oplyses ved følgende Exempler:

a. Naar Dividenden allene er en sammensat Størrelse, f. Ex $(ab - ac + ad) : a$, opsættes saaledes:

$$\begin{array}{r}
 a) \quad ab - ac + ad \vdots b - c + d \\
 \underline{-ab} \\
 -ac \\
 \underline{+ac} \\
 ad \\
 \underline{-ad} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4m) 20ma - 12ma \mid 5a - 3a \\
 \underline{20ma} \\
 0 \\
 \underline{-12ma} \\
 \underline{+12ma} \\
 0
 \end{array}$$

Man dividerer her hvert Led i Dividenden med Divisor (ligesom ved Tal Divisionen), og skriver de ndkomne Quotienter bag Stregen med deres

deres behørigte Tegn. Dog maa i dette Tilfælde ethvert Led i Dividenden indeholde de samme Bogstaver som Divisor, da Divisionen ellers ikke lader sig udføre uden Bræk.

b. Naar både Dividenden og Divisor ere sammensatte Størrelser, f. Ex.:

$$\begin{array}{r}
 a + b) a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a^2 + 2ab + b^2 \\
 \underline{a^3 + a^2b} \\
 2a^2b + 3ab^2 \\
 \underline{2a^2b + 2ab^2} \\
 ab^2 + b^3 \\
 \underline{ab^2 + b^3} \\
 0 \quad 0
 \end{array}$$

Man tager her det første Led af Divisor a , og undersøger hvor ofte det indeholdes i det første Led af Dividenden a^3 , og findes da efter forrige § Quotienten a^2 , dermed multipliceres nu hele Divisor, og det udfomne Produkt subtraheres fra Dividenden; nu undersøges fremdeles, hvor ofte det første Led af Divisor indeholdes i det første Led af den tilbageværende Rest af Dividenden, og fortsæres paa samme Maade som tilforn, indtil der, som i det foregaaende og følgende Exempel, intet bliver tilovers; Divisionen er da fuldført og Quotienten nøiagtig udtrykt $(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2$.

$$\begin{array}{r}
 a - b \overline{) a^3 - b^3 + a^2 + ab + b^2} \\
 \underline{a^3 + a^2b} \\
 a^2b - b^3 \\
 \underline{a^2b + ab^2} \\
 ab^2 - b^3 \\
 \underline{ab^2 - b^3} \\
 0 0
 \end{array}$$

Næder i Divisionen det Tilfælde, at de enkelte Led i Dividenden ikke indeholde Divisor, da udtrykkes Quotienten ved Brøkt, som i følgende Exempel: $a : (a - x)$ der udføres saaledes:

$$a - x \overline{) a + 1 + \frac{a}{x} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{x^4} \text{ o. s. f.}}$$

$$\begin{array}{r}
 \overline{a + x} \\
 \underline{ + x} \\
 x
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x \overline{) x^2} \\
 \underline{ + a} \\
 x^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 \\
 \underline{ + a} \\
 a
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 \overline{) x^3} \\
 \underline{ + a^2} \\
 x^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 \\
 \underline{ + a^2} \\
 a^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 a^2 \\
 \underline{ + a^3} \\
 x^3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^3 \overline{) x^4} \\
 \underline{ + a^3} \\
 x^4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 a^2 \overline{) a^3} \\
 \underline{ + a^3} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^4 \\
 \underline{ + a^3} \\
 a^3
 \end{array}$$

Divisionen ſkeer her efter ſamme Regler ſom før, men da der ſtrar møder, at x ſkal divideres med a , kan Divisionen efter § 40 ikke ſkee anderledes, end ved at udtrykke Quotienten ſom en Brøft $\frac{x}{a}$ o. ſ. f. Divisionen kan fortsættes i det Uendelige, og man kan derved opløſe enhver Brøft i en uendelig Tal-Række, hvorom mere paa et andet Sted.

Anm. At handle udførligere om Regning med Bogſtaver, om Potentſer, og Regnings-Arterne dermed, ſamt om Tal-Rækker og Rigninger, troer jeg efter min Plan her ikke paſſende, jeg har allene villet viſe de fire Regnings-Arter med almindelige Tegn eller Bogſtaver, for at kunde nytte de almindelige Former i det følgende, ved Kvadrat- og Cubik-Rodens Udtrækning, og tilſige for i Almindelighed at udføre Deviſerne i Læren om Forhold og Proportioner.

Om Decimal eller tiendedeels Brøft.

§. 47.

En tiendedeels Brøft eller en Decimal-brøft kaldes enhver Brøft, hvis Nævner er ti, hundrede eller tusinde &c., eller hvor Nævneren er en høiere Eenhed, ſ. Ex. $\frac{7}{10}$, $\frac{32}{100}$, $\frac{756}{1000}$, $\frac{2873}{10000}$.

Efter det decadiſke Tal-System's Natur (§14) voxer Tifrenes Værd fra høire til venſtre, og bliver for hver Plads, de rykke frem, ti Gange høiere, paa

paa samme Maade kan de siges at tage af i Værd, fra venstre til høire, og blive for hver Plads de røffes mod høire Side, ti Gange ringere. Denne Egenskab ved Tal-Systemet giver, at man kan udtrykke Decimalbrøken blot ved at skrive Tællerne paa følgende Maade: Man betegner med en Streg eller et Punkt, hvor de hele Tal ophøre, og skriver efter dette Mærke mod høire Decimalbrøkenes Tæller, det Ziffer næst ved Tællerne mod høire maa da betegne Størrelser som ere ti Gange mindre end Eenheden og følgelig tiende Dele; det næste Ziffer, Størrelser, som ere ti Gange mindre end tiende Dele, altsaa hundred Dele o. s. v. Saaledes betegner Udtrykket 3, 7 tre Eenheder og syv tiende Dele, og altsaa det samme som $3\frac{7}{10}$; 8, 42 otte hele, fire tiende Dele og to hundred Dele eller 42 hundred Dele, og er altsaa $= 8\frac{42}{100}$. De Ziffer paa høire Side af Stregen kaldes Decimal-Ziffer eller Decimaler.

I det Tilfælde, at der ingen hele Tal ere, betegnes deres Plads med et Nul, ved hvilket Stregen sættes, saaledes skrives $\frac{27}{100}$, som Decimalbrøk 0,27. En saaledes skreven Decimalbrøk kan læses, enten ved at læse hver Slags Dele for sig, f. Ex. 8,342 læses: otte hele, tre tiende Dele, fire hundrede Dele og to tusinde Dele; eller og, otte hele, tre hundrede og to og fyrretyve tusind

tusind Dele, da $\frac{3}{8}$ er $= \frac{300}{1000}$, $\frac{4}{100} = \frac{400}{1000}$
 og følgelig $8 + \frac{300}{1000} + \frac{400}{1000} + \frac{2}{1000} = 8\frac{702}{1000}$
 $= 8,702$. Man kan altsaa gøre den almindel-

lige Regel: at Tælleren løses som et heelt Tal, og
 Nævneren er altid en høiere Eenhed; der har saa
 mange Nuller, som der ere Decimaler i Tælleren.

Anm. Man kan paa Grund af det nu anførte kalde
 tiende Dele Eenheder af første ringere Orden, hun-
 dred Dele af anden, tusinde Dele af tredie, ligesom
 man kalder Tiere, Eenheder af første høiere Orden,
 Hundreder af anden, Tusinder af tredie o. s. f.; og
 paa Grund deraf skrive Decimalbrøk, uden Komma
 eller Streg, naar Tællernes Plads betegnes med et
 0, og de høiere Eenheder paa venstre Side af Tæller-
 ne med de bekræftende Tal 1, 2, 3, men de ringere
 Eenheder paa høire Side med de nægtende Tal — 1,

— 2, — 3 ic., f. Ex. $\overset{2}{2} \overset{1}{3} \overset{0}{4} \overset{-1}{5} \overset{-2}{6} \overset{-3}{7}$ er $= 234,567$
 $= 234\frac{567}{1000}$.

§. 48.

At forandre en given simpel Brøk til en De-
 cimalbrøk, er allene at søge Tælleren (§ 47) til en
 Decimalbrøk, der udtrykker den givne Brøks Værdi
 uforandret; dette skeer ved at føie Nuller til
 den givne Brøks Tæller, og dividere denne saaledes
 forøgede Tæller med dens Nævner, Quotien-
 ten er da den søgte Decimal-Tæller, f. Ex. $\frac{3}{8}$ for-
 andres saaledes til Decimal-Brøk $\frac{300}{8} = 0,375$.

Bemærk. Den fundne Decimal-Tæller 0,375 er $\equiv \frac{375}{1000} \equiv \frac{375 \times 8}{1000 \times 8}$ (§ 30. 4) $\equiv \frac{3000}{8000} \equiv \frac{3000 \cdot 1000}{8000 \cdot 1000} \equiv \frac{3}{8}$. Egentlig forøges og formindstes Brøktens Tæller og Nævner med samme Tal og dens Værd bliver altsaa i Følge den anførte § 30 uforandret. Saaledes er $\frac{5}{8} \equiv \frac{5000}{8000} \equiv \frac{5000 \cdot 8}{8000 \cdot 8} \equiv \frac{625}{1000} \equiv 0,625$.

Der gives imidlertid Brøk, der ikke lade sig nøiagtig forvandle til Decimalbrøk f. Ex. $\frac{2}{3} \equiv \frac{2000000}{3000000} \equiv 0,666666\frac{2}{3}$. I saadanne Tilfælde vedbliver man at sætte flere Nuller til Tælleren, og fortsætter Divisionen med Nævneren; saalænge Regningens Nøiagtighed udfordrer det; i nærværende Exempel bliver der, efter at der er sæt 6 Nuller til, $\frac{2}{3}$ tilbage, som er $\frac{2}{3}$ af en Million Deel (§ 47). Denne Brøk, som er over en halv, ansees for en heel Million Deel og antages altsaa $\frac{2}{3} \equiv 0,666667$, hvor Decimalbrøken er $\frac{1}{3}$ af en Million Deel større end den egentlig burde være. Er derimod den ved Divisionens Ophør overblevne Brøk under en halv, da bortkastes den, saaledes er $\frac{1}{3} \equiv 0,333333 \dots$

De saaledes fundne Decimalbrøk ere vel alle enten større eller mindre end de givne simple Brøk, i hvis Sted de skulde sættes; men jo længere man ved at tilføie Nuller fortsætter Divisionen, desto mere nærmer Værdien af Decimalbrøken sig til den givne

givne Brøks Værdi, og man kan fortsætte det saa længe, at Fællen ikke udgør en Million, Billion, Trillion Deel af Eenheden. Da nu Regningen med Decimalbrøst er, som strax videre skal vides, saa overmaade beqvem, saa er i praktiske Regninger, der enten ikke fordrer en saa gandske fuldstændig Styrked, eller og efter deres Natur ikke kan tage derimod, simple Brøsters Forvandling til Decimalbrøst, af megen Bigtighed og Nytte.

§. 49.

Decimalbrøsters Natur medfører, at de uden Vanskelighed bringes til eens Benævning, blot ved at sætte Nuller til høire Side af Tælleren, hvorved Værdien ikke forandres, f. Ex. $0,75 = 0,750 = 0,7500$, thi udtrykte som simple Brøst er $0,75 = \frac{75}{100} = \frac{750}{1000} = \frac{7500}{10000}$ (§ 30). De adderes og subtraheres derfor, naar de blot skrives ordentlig under hinanden (tiende Dele under tiende Dele, hundred Dele under hundred Dele ic.), efter de samme Regler, som om hele Tal ere forklarede (§ 17 og 19), f. Ex.

At Addere:

$$\begin{array}{r} 8,304 \\ 7,54 \\ 0,0598 \\ 3,7569 \\ \hline 19,6607 \end{array}$$

At Subtrahere:

$$\begin{array}{r} 12,3405 \\ 8,7638 \\ \hline 3,5767 \end{array}$$

Decimalbrøf multipliceres som hele Tæl og Antallet af Decimal-Sifrene i Produktet er saa stort, som Summen af Faktorerne's Decimaler.

Rigtigheden af denne Regel indsees, naar man erindrer, at, naar to Tæl, der endes med Nuller, multipliceres med hinanden, faaer Produktet saa mange Nuller, som begge Faktorerne (§ 23. Till. 2). Hvad der gielder om Tæl i Almindelighed, gielder og om en Brøfs Ræbner; skal altsaa 2 Brøfer, hvis Ræbnere endes med Nuller, multipliceres med hinanden (§ 35), saa faaer Produktets Ræbner saa mange Nuller, som begge Faktorerne's. Nu har en Decimalbrøfs Ræbner altid saa mange Nuller, som der ere Decimaler i Tælleren (§ 47), naar altsaa to Decimalbrøfe multipliceres, maa Produktet have saa mange Sifre paa høire Side af Kommaet, som begge Faktorerne.

For at indsee dette endnu tydeligere, skriver man Decimalbrøferne, som simple Brøf, og multiplicere dem efter § 35, f. Ex.:

$$\begin{array}{r}
 0,375 \\
 \times 0,26 \\
 \hline
 2250 \\
 750 \\
 \hline
 0,09750
 \end{array}$$

$0,375 \times 0,26 = \frac{375}{1000} \times \frac{26}{100} = \frac{9750}{100000}$
 Ved at multiplicere Tællerne i nærværende Exempel faaer vi Produktet 9750. Efter den nylig forklarede

klarede Regel fulde Produktet have fem Decimaler, her sæies altsaa Nuller foran, for at Sifrene faa faae deres rigtige Plads, og i Følge deraf betegne den rigtige Classe af ringere Eenheder (§ 47. Anmærkning).

Bestaaer enten den eene eller begge Faktorerne af hele Tal og Decimalbrøf, skeer Multiplicationen paa lige Maade og efter samme Regel; thi ethvert saadan Tal kan ansees som en uegentlig Brøf, f. Ex. at multiplicere a) 32,7835 med 0,423.

$$\begin{array}{r}
 32,7835 \\
 \underline{0,423} \\
 983505 \\
 655670 \\
 1311340 \\
 \hline
 13,8674205
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 = \frac{327835}{10000} \times \frac{423}{1000} = \\
 \frac{138674205}{10000000} = 13,8674205
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{b) } 5,023 \\
 \underline{3,46} \\
 30138 \\
 20092 \\
 15069 \\
 \hline
 17,37958
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 = \frac{5023}{1000} \times \frac{346}{100} = \\
 \frac{1737958}{100000} = 17,37958
 \end{array}$$

§. 51.

Division med Decimalbrøf skeer som med hele Tal; kun at Quotienten faaer saa mange Decim-

Decimaler, som Dividenden har flere end Divisor, f. Ex. $324,48 : 2,4$.

$$2,4 \overline{) 324,48} \uparrow 135,2$$

$$\underline{24}$$

$$84$$

$$\underline{72}$$

$$124$$

$$\underline{120}$$

$$48$$

$$\underline{48}$$

$$00$$

Bevils. Ere Dividenden og Divisors sidste Sifre mod høire Side enten begge Tensere, eller og begge tiende Dele, hundred Dele, eller tusind Dele, og følgelig Dividenden og Divisor Størrelser af lige Art, bliver Quotienten efter § 25 altid hele Tal. Har derimod Dividenden flere Decimaler end Divisor, er den for hver Decimal den har flere, 10 Gange mindre; men samme Divisor kan ikke indeholdes saa ofte i et ti Gange mindre Tal, som i det større, og Quotienten maa da blive ti Gange mindre for hver, det er, der maa i den affikeres ved Decimal-Tegnet saa mange Sifre fra høire, som der i Dividenden er flere Decimaler, end i Divisor. Lad i det ovenanførte Exempel

Kom

Kommaet i Dividenden flyttes et Ziffer tilbage mod høire, det hedder da $3244,8 : 2,4 = 32448 : 24 = 1352$. Ved at rykke Kommaet en Plads længere mod Venstre, bliver Dividenden 10 Gange mindre, og Divisor uforandret; Quotienten bliver altsaa ikke den samme, men ti Gange mindre, hvilket just, efter det om Decimalbrøfene forklarede, skeer naar dens sidste Ziffer affikeres ved Decimal-Tegnet, og den bliver da i nærværende Exempel $135,2$. Blev Dividenden $32,448$ og Divisor uforandret $2,4$, vilde Quotienten blive $13,52$.

Indtræffer det Tilfælde, at Dividenden har færre Decimaler end Divisor, da kan man ved at sœie Nuller til Dividenden, hvorved dens Værdi slet ikke forandres (§ 49), bringe dem til at blive eensartede, f. Ex. $328 : 0,75 = 328,00 : 0,75$

$$0,75)328,00 \uparrow 437,33$$

$$\begin{array}{r} 300 \\ \hline 280 \\ 225 \\ \hline 550 \\ 525 \\ \hline 250 \\ 225 \\ \hline 250 \\ 225 \\ \hline 25 \end{array}$$

Quotienten er i Følge det forhen forklarede 437 de overblevne 25 kunde tilføies som en simpel Brøk, og blev da $437\frac{25}{75}$; men vil man have Quotienten udtrykt i Decimalbrøk, tilføies flere Nuller, og Divisionen fortsættes, men da Dividenden ved de tilføiede

Null.

ler er bleven formindsket, maa der i Quotienten afstaares Decimaler efter Reglen.

Ved at betragte nærværende Exempel, seer man let, at de følgende Tifre, der ved at sætte Nuller til Dividenden, kunde erholdes i Quotienten, vilde stedse blive de samme, og at der bestandig vilde blive 25 tilovers. Man retter sig altsaa i Henseende til Fortsættelsen af Divisionen efter det som er sagt § 48.

Anmærk. Rigtigheden af den anførte Divisions-Regel indsees ogsaa, naar Decimalbrøken udtrykkes som simple Brøf og behandles efter § 37, for Exemp.:

$$\begin{aligned} 32,448 : 2,4 &= \frac{32448}{1000} : \frac{24}{10} = \frac{32448}{1000} : \frac{2400}{1000} \\ &= \frac{32448}{2400} = 13\frac{1248}{2400} = 13\frac{1248:24}{2400:24} = 13\frac{52}{100} \\ &= 13,52. \end{aligned}$$

Da de færreste Brøf næagtig kan udtrykkes i Decimalbrøf, men kun ved Tilnærmelse (§ 48), saa findes, ved at give Agt paa de ei næagtigt rigtige Decimalbrøfs Indflydelse paa det ved Regnings-Arterne udkommende, at man paa Grund af de sidste Tifres Urigtighed i Produktet og Quotienten kan forforte Multiplicationen og Divisionen med Decimalbrøf.

Om Tallenes Potenser og deres Rodder.

§. 52.

Et Produkt af lige store Faktorer, kaldes en Potens eller Bærdighed af det som Faktor brugte Tal,

Tal, der ogsaa kaldes Potensens Rod; Faktorer-
 nes Antal bestemmer Graden af Potensen, og Tal-
 let, hvorved dette tilkiendegives kaldes Potens-Ex-
 ponent (Værdigheds Angiver). Saaledes kaldes
 et Produkt af to lige store Faktorer den anden Po-
 tens eller Kvadrat-Tallet, eller og kortere Qua-
 dratet af Roden, som da faaer Navn af Qua-
 dratrod. Et Produkt af tre lige store Faktorer,
 heter den tredie Potens eller Cubic-Tallet, og
 kortere Cubus af Faktoren, der nu kaldes Cu-
 bifrod. Og i Almindelighed, et Produkt af n
 lige store Faktorer den n te Potens af Faktoren.
 Til Ex.: 16 er Kvadratet, 64 Cubus, og 1024
 den femte Potens af 4, fordi $4 \times 4 = 16$,
 $4 \times 4 \times 4 = 64$, og $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$.
 Ligeledes er 4 Kvadratroden til 16;
 Cubifroden til 64, og den femte Rod til 1024.

Med et almindeligt Udtryk er aa Kvadratet,
 aaa Cubus, $aaaaa$ den femte Potens af a o. s. f.

Till. 1. At ophøie et Tal til 2 den, 3 die
 eller n te Potens, er at finde denne Potens af Tal-
 let, som skeer altsaa blot ved at multiplicere Tal-
 let 2 , 3 eller n Gange med sig selv, og tilkiende-
 gives ved Exponenten, som skrives over Linien ved
 høire Side af Roden saaledes: $4^2 = 4 \times 4 =$
 16 . $8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$. $a^2 = aa$
 $a^3 = aaa$ (§ 40).

Anm. At ophøie et Tal til anden Potens, kaldes at quadrere det; til tredie, at cubere det.

Exll. 2. At udtrække den 2den, 3die eller nte Rod af et Tal, er at finde denne Rod α : det Tal, der 2, 3 eller n Gange multipliceret med sig selv, har frembragt det givne Tal. At dette skal skee, tilkiendegives ved det saa kaldte Rod-Tegn $\sqrt{}$, der sættes foran det Tal, hvis Rod søges. Ved et Tal, som sættes i Rod-Tegnet og kaldes Rod-Exponent, tilkiendegives, hvilken Rod der forlanges, f. Ex. $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{256}$ betyder, at der søges den tredie Rod eller Cubik-Roden af 27, fjerde Rod af 256. Ved Quadratroden udelader man for Kortheds Skyld Exponenten 2, som skulde sættes i Rodtegnet, saa at $\sqrt{64}$ betyder Quadratroden af 64.

Exll. 3. Et Tal quadreres, naar det multipliceres med sig selv, og cuberes, naar det multipliceres med dets Quadrat, og bliver i Almindelighed ophøiet til den nte Potens, naar det multipliceres med sin $(n - 1)$ te Potens. Naar man altsaa multiplicerer de ni enkelte Tals Quadrater, som vides af Multiplications-Tabellen (§ 21) med Tallene selv, har man deres Cuber, og altsaa følgende Tabel over deres Quadrat og Cubik-Tal.

| | | | | | | | | | |
|---------|---|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Rod | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Quadrat | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 |
| Cubus | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 |

Till. 4. Naar Roden til en Potens forøges med et Mul, forøges dens Quadrat med to, Cubus med tre o. s. f. (§ 23. 2 Tillæg), thi f. Ex.

$$30^2 = 30 \times 30 = 900$$

$$300^2 = 300 \times 300 = 90000$$

$$30^3 = 30 \times 900 = 27000$$

$$300^3 = 300 \times 90000 = 27000000$$

§. 53.

En Brøk quadreres, cuberes og forøges til n . Potens, naar dens Tæller og Nævner hver for sig, quadreres, cuberes eller øges til n . Potens; thi at quadrere en Brøk er at multiplicere den med sig selv (§ 52. 3 Tillæg), hvilket efter § 35 skeer ved at multiplicere Tæller med Tæller og Nævner med Nævner, og altsaa just, ved at quadrere baade Tæller og Nævner, f.

$$\text{Ex. } \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25} = \frac{4^2}{5^2} \quad \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{8}{343} = \frac{2^3}{7^3}$$

At udtrække Roden af en Brøk (§ 52. 2 Til.) skeer følgende ved at udtrække Roden af Tæller og Nævner, og Roden er en Brøk, hvis Tæller og

Nævner ere Røder af den givne Brøks Tæller og

$$\text{Nævner, f. Ex., } \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}.$$

Tillæg. Quadrattet af en egentlig Brøk er altsaa mindre end Roden; Cubus mindre end Quadrattet, og i Almindelighed enhver høiere Potens af samme Brøk mindre end den lavere. S. Ex., $\frac{4}{9} < \frac{2}{3}$; $\frac{8}{27} < \frac{4}{9}$ (§ 34).

§. 54.

Af en Brøk, hvis Tæller og Nævner ere bestemte og endelige Størrelser, og som ikke er liig et heelt Tal, kan ingen Potens blive et heelt Tal.

Beviis. Er den givne Brøk en egentlig Brøk, er det klart af Tillægget i forrige §, thi da Potenserne stedse blive mindre end Roden, blive de saa meget mere mindre end en Heel. Er det derimod en uegentlig Brøk, som et er liig et heelt Tal, hvor Nævneren altsaa (§ 28) ikke er nogen aliquot Deel af Tælleren; da er enten Tæller og Nævner relative Prim-Tal, f. Ex. i Brøken $\frac{1}{7}$ eller og, de ved at divideres med deres største fælles Maal (§ 31) kan bringes dertil, f. Ex. $\frac{3}{28} = \frac{3}{28}$. Enhver Potens af en saadan Brøk vil blive en Brøk, hvis Tæller og Nævner stedse blive Produkter af Tal; der ere indbyrdes Prim-Tal; og følgende

getig vil Ræbneren aldrig blive en aliquot Deel af Tælleren og Potensen aldrig blive et heelt Tal (§ 29).

1 Till. Naar altsaa Roden til et heelt Tal ikke er et heelt Tal, er det heller ingen Brøf, hvis Tæller og Ræbner ere endelige Tal; men da enhver Mængde maa kunde udtrykkes ved hele Tal og Brøf, maa denne Rod nødvendig være en Brøf; den er altsaa en Brøf, hvis Tæller og Ræbner ere uendelig store, og følgerlig aldrig nøiagtig kan udtrykkes. Saadanne Rod-Størrelser kaldes irrationale Tal, f. Ex. $\sqrt{7} = 2,645 \dots$
 $\sqrt{3} = 1,732 \dots$

2 Till. Et Tal, hvis Kvadrat-Rod er et heelt Tal, kaldes et fuldkomment Kvadrat-Tal; et Tal, hvis Cubik-Rod er et heelt Tal, hedder et fuldkomment Cubik-Tal, og i Almindelighed enhver Potens, hvis Rod er et heelt Tal, en fuldkommen Potens. Er Roden derimod ikke et heelt Tal, hedder det, et ufuldkomment Kvadrat- og Cubik-Tal, og i Almindelighed en ufuldkommen Potens. Rodderne til alle ufuldkomne Potenser ere i Følge 1 Tillæg irrationale Tal.

§. 55.

Et fuldkomment Kvadrat-Tal skal, naar Roden bestaaer af to Dele, eller er binomisk, inde-

indeholde: 1) Kvadratet af Rodens første Deel, 2) det dobbelte Produkt af begge Dele, 3) Kvadratet af den sidste Deel.

Bevils. Da Bogstaver ere almindelige Tegn, saa kan enhver saadan binomisk Rod udtrykkes ved det almindelige Udtryk $a + b$, og altsaa Kvadratet af en saadan Rod ved $(a + b)^2$, som er $\equiv (a + b) \times (a + b) \equiv a^2 + 2ab + b^2$. (§ 44), da a betegner Rodens første Deel, er a^2 den første Deels Kvadrat; $2ab \equiv 2 \times ab \equiv$ det dobbelte Produkt af begge, eller Produktet af den første og anden Deel to Gange taget, og $b^2 \equiv$ Kvadratet af den anden Deel.

Med Tal-Exempler lader det sig ogsaa oplyse saaledes:

$$\begin{array}{rcl}
 47 & \equiv & 40 + 7 \\
 47 & & \\
 \hline
 49 & \equiv & 7^2 \\
 28 & \equiv & 4 \times 7 \\
 28 & \equiv & 4 \times 7 \\
 16 & \equiv & 4^2 \\
 \hline
 2209 & \equiv & 47^2
 \end{array}
 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} = 2 \times 4 \times 7$$

Tallet 47 bestaaer af 4 Tiere og 7 Eenere, Kvadrat-Tallet er sammensat af Tiernes Kvadrat, som er 1600 (§ 52. 4 Till.), Produktet af Tierne og Eenerne to gange taget, som er $2 \times 280 \equiv$

560, og Tæernes Kvadrat, som er 49; ved, som i nærværende Exempel, at skrive de enkelte Produkter hver paa sit Sted, efter § 22, sees dette tydeligt. Exemplet kan og gaae saaledes:

$$47 = 40 + 7$$

$$47^2 = (40 + 7)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 7 + 7^2$$

$$40^2 + 7^2$$

$$280 + 49$$

$$1600 + 280$$

$$47^2 = 1600 + 560 + 49$$

1 Tillæg. Da ethvert heelt Tal, af hvor mange Sifre det end bestaaer, kan deles i to Dele, saa kan den forklarede Form anvendes paa alle Tal, til at finde deres Kvadrat, f. Ex. $476^2 = (470 + 6)^2 = 470^2 + 2 \times 470 \times 6 + 6^2$, som udsættes saaledes: $476 = 470 + 6$

$$476^2 = \begin{array}{r} 40^2 = 1600 \\ 2 \times 40 \times 7 = 560 \\ 7^2 = 49 \\ 2 \times 470 \times 6 = 5640 \\ 6^2 = 36 \\ \hline 226576 \end{array}$$

2 Tillæg. Ved at sammenligne Delene af Kvadratet af 47 med Delene af Kvadratet af 476, sees, at Kvadratet, naar Roden forges med eet Siffer, forøges med et dobbelt Produkt af de forrige Sifre og det afsluttede, som i nærværende Exempel

empel er $2 \times 470 \times 6$, og Quadratet af det tilføiede som her er 6^2 .

Gøres altsaa Roden 476 endnu med et Ziffer og bliver 4763, vil Quadratets Dele være

$$\begin{array}{l}
 4760^2 \left\{ \begin{array}{l} 40^2 = 16 \dots\dots\dots \\ 2 \times 40 \times 7 = 56 \dots\dots\dots \\ 7^2 = 49 \dots\dots\dots \end{array} \right. \\
 4763^2 \left\{ \begin{array}{l} 2 \times 470 \times 6 = 564 \dots\dots\dots \\ 6^2 = 36 \dots\dots\dots \\ 2 \times 4760 \times 3 = 2856 \dots\dots\dots \\ 3^2 = 9 \dots\dots\dots \end{array} \right. \\
 \hline
 22686169
 \end{array}$$

Med almindelige Tegn sees det, saaledes:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2$$

$$(a+b+c+d)^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2$$

$$(a+b+c+d+e)^2 = (a+b+c+d)^2 + 2(a+b+c+d)e + e^2$$

3 Tillæg. Da ethvert med Ziffre udtrykt Tal, kan ansees at bestaae af et vist Tal $n + 1$, saa vil Quadratet af ethvert saadant Tal bestaae af $n^2 + 2n + 1$, og altsaa Forskiellen mellem Quadratet af n = n^2

$$\text{og Quadratet af } n + 1 = n^2 + 2n + 1$$

naar Roden forhoies ved Tillæg af Enheden, forhoies Quadratet med det dobbelte af den forrige Rod

Rod og Eenheden, f. Ex. $12^2 = 144$. $13 = 12 + 1$. $13^2 = 12^2 + 2 \times 12 + 1 = 169$.

§. 56.

Ved den i forrige § forklarede Opløsning af Kvadratets Dele indsees, at (det første Ziffer fra venstre Side undtagen) giver ethvert, af de øvrige Zifre i Roden, to nye Zifre i Kvadrat-Tallet, hvoraf det første indeholder Eenerne af det dobbelte Produkt, af det eller de foregaaende Zifre, og dette, og det andet dettes Kvadrat. Naar altsaa et givet Kvadrat-Tal inddeles i Classer fra høire til venstre to Zifre i hver Classe, (den sidste Classe undtagen, som undertigen kun har eet Ziffer), saa har Roden til dette Kvadrat saa mange Zifre, som der ere Classer, og begynder man fra venstre, da findes i den første Classe Kvadratet af Rodens første Ziffer, i den anden det dobbelte Produkt af Rodens første og andet Ziffer, samt Kvadratet af det andet; i den tredje det dobbelte Produkt af Rodens tredje første Zifre og det tredje, samt dets Kvadrat; og altsaa i den første Classe Kvadratet af Rodens første Ziffer; i de 2 første Kvadratet af de to første Zifre i Roden, og i de tre første Classer Kvadratet af Rodens tre første Zifre &c. f. Ex. For Exempel Kvadratet af 123456789.

$$4762 \text{ er } \equiv 18.$$

56 ,

49 . .

564 .

36 . .

2856 .

9

 22686169

$$2354^2 \equiv 4 . .$$

12 .

9 .

230 .

25 .

1880 .

16

 5541316

§. 57.

At udtrække Roden af et givet Tal, der bestaar af flere end to Sifre (thi da vil det uden Vanskelighed vides af den § 52 anførte Tabel) skeer altsaa saaledes:

1) Det givne Tal inddeles i Classer fra høire til venstre to Tal i hver Klasse.

2) I Quadrat-Tabellen søges det høieste Quadrattal, der lader sig subtrahere fra Tallet i første Klasse

Classe fra venstre Side, som hensesættes derunder og subtraheres derfra; dets Rod er den søgte Rods første Ziffer.

- 3) Til den fra første Classe overblevne Differenti nedsættes anden Classe, det fundne første Rod-Ziffer fordobles og hensesættes, saa at dets Enheder kommer under det første af anden Classes Zifre, som Divisor, og den derved fundne Quotient bliver Rodens andet Ziffer. Med dette multipliceres den brugte Divisor, og Productet sættes med dets Enheder under det første af anden Classes Zifre; nu tages Quadrater af Rodens andet Ziffer, og sættes med dets Enheder under anden Classes første Ziffer. Disse toende Dele sammenlægges og subtraheres fra de af første og anden Classe lige over staaende Tal. Lader denne Subtraction sig ikke udføre, er det Bevis paa, at Rodens andet Ziffer er taget for høit, i modsat Tilfælde er den fundne Quotient virkelig det andet Ziffer af den søgte Rod.

- 4) Til den fra første og anden Classe overblevne Differenti nedsættes tredje Classe, det dobbelte af de to fundne Rod-Zifre tages nu som Divisor, og hensesættes, at dets Enheder kommer under det første af tredje Classes Zifre. Med dette multipliceres de lige over staaende Tal, og den fundne Quotient

$$2(a+b)c+c^2=1836$$

$$93, 64$$

$$2(a+b+c)=(46 \ 8)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2(a+b+c)d=936 \\ d^2=4 \end{array} \right\}$$

$$2(a+b+c)d+d^2=9364$$

$$00,00$$

Det hvieste Quadrat der kan subtraheres fra første Klasse er 4; dets Rod er 2. Den første Divisor er 2×2 , som føttes efter No. 3, og den fundne Quotient 3 er det andet Ziffer i Roden; med den multipliceres Divisoren 4, og Produktet $4 \times 3 = 12$ sættes forøget med Quadraten af 3, subtraheres fra 18, til Resten 19. Sies 3die Klasse o. s. f. De Tal, der saaledes efterhaanden fradrages fra Tallet 5484964 udgiøre just Quadraten af 2342 efter §. 55 og 56.

Et andet Exempel:

$$\begin{array}{r} \sqrt{32 \overline{) 4786}} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7, 47 \\ (10)6 \\ 636 \end{array}$$

$$11, 86$$

$$(142)9$$

$$1025$$

1 Tillæg. I Steden for at multiplicere først det dobbelte af det eller de fundne Rod-Zifre med Qvotienten, og dertil igien addere Quadrattet af Qvotienten, for under et at subtrahere det fra de over staaende Tal efter No. 3, kan man, som i sidste Exempel er skeet, strax hensette den fundne Qvotient ved Siden af Divisoren, og derpaa foretage Multiplicationen; da man faaer ved een Multiplication det dobbelte Produkt af de förrige Zifre og det Rye, samt Quadrattet af det nye, saaledes er i første Exempel $636 \equiv 2 \times 50 \times 6 + 6^2$ og $10161 \equiv 2 \times 560 \times 9 + 9^2$.

2 Tillæg. Bliver, som i sidste Exempel, noget tilovers, da sees, at Roden ikke er funden nsiagtig; thi 569 er mindre end Roden af 324785, men dog kan denne Rod ikke være een Enhed større end 569, thi i saa Fald maatte det överblevne 1025 være mere end $2 \times 569 + 1$ (§ 55. 3 Till.) Roden kan da ikke bestemmes nsiagtig, da den er et irrational Tal (§ 54. 2 Till.), men findes ved Tilnærmelse i Decimalbrøk, som strax skal forflares.

§. 58.

For bedre at forstaae denne Maade at finde Roden af et ufuldkomment Quadrat-Tal ved Tilnærmelse i Decimalbrøk, vil jeg først vise, hvorledes

ledes Roden udtækkes af en given Decimalbrøf.
 Til Ex. af 13,7. Man søger nemlig til den givne
 Brøf paa høire Side saa mange Ruffer man vil,
 dog saa, at Decimalernes Antal bliver lige, og
 derpaa udtækker Roden som af hele Tal, der vil
 da blive i Roden saa mange Decimaller, som, de
 med Ruffer formerede Decimaller, udgjorte Classer.

$$\sqrt{13,7} = \sqrt{13,700000}$$

$$\sqrt{13,70,00,00} \dagger 3,701$$

9

470

(6)7

469

1,00

(74)0

000

1,00,00

(740)1

7401

2599

$$\text{thi } \sqrt{13,7} = \frac{\sqrt{137}}{\sqrt{10}} (\S 53) \frac{\sqrt{13700000}}{\sqrt{1000000}} =$$

$$\frac{3701}{1000} = 3,701.$$

I Tillæg. Roden af enhver Brøf findes
 derfor lettest ved at forandre den til en Decimal-
 brøf,

brøf, og betraf udtæffe Roden, f. Ex; da $\sqrt{\frac{1}{5}} = 0,714285714285 \dots$, saa er $\sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{0,714285714285} = 0,845134$.

§. 59.

Uf et heelt Tal, som ikke er et fuldkomment Kvadrat-Tal, findes Roden ved Tilnærmelse i Decimalbrøf, saa usiagtig som man vil, paa følgende Maade:

Man føier til det givne Tal saa mange Par Nuller, som man forlanger Decimater i Roden, og udtrækker derpaa Roden efter de § 57 forklarede Regler. F. Ex., der forlanges at vide Roden af 7.

$$\sqrt{7} \mid 2,6457$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 3,00 \\ (4)6 \\ 276 \end{array}$$

$$24,00$$

$$(52)4$$

$$2096$$

$$304,00$$

$$(528)5$$

$$26425$$

$$3975,00$$

$$(5299)8$$

$$379349$$

$$27151$$

Rig.

Rigtigheden af denne Fremgangsmaade indsees saaledes: 7 er $\equiv 7,000000$ (§ 49) og altsaa $\sqrt{7} \equiv \sqrt{7,000000}$.

§. 60.

Cubus eller Cubus-Tallet af en binomist Rod (en Rod som bestaaer af to Dele), bestaaer af: 1. Cubus af Rodens første Del. 2. Det tredobbelte Produkt af den første Quadrats multipliceret med den anden. 3. Det tredobbelte Produkt af den første multipliceret med den andens Quadrats; og 4. Cubus af den anden Del.

Efter § 52 findes Cubus-Tallet af en Rod, naar den multipliceres med sit Quadrats, altsaa er $(a + b)^3 \equiv (a^2 + 2ab + b^2) \times (a + b) \equiv$

$$\begin{array}{r} a^2 + 2ab + b^2 \\ \times \quad a + b \\ \hline a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

og da Udtrykket $a + b$ gælder i Almindelighed for enhver binomist Rod, saa maa og dets fandne Cubus vise de Dele, som ethvert saadan fuldkomment Cubus-Tal nødvendig maa indeholde.

Saaledes findes Cubus af 47, som er $\equiv 40 + 7$ at være

$$40^3 + 3 \cdot 40^2 \cdot 7 + 3 \cdot 40 \cdot 7^2 + 7^3 \equiv 17$$

$$1, 40^3 = 64$$

$$2, 3 \times 40^2 \times 7 = 336$$

$$3, 3 \times 40 \times 7^2 = 588$$

$$4, 7^3 = 343$$

$$47^3 = 103823$$

Tillæg. Da ethvert Tal, af hvor mange Sifre det end bestaar, kan deles i to Dele, og selgelig bringes til det almindelige Udtryk $a + b$, saa kan og Cubis-Tallet af ethvert heelt Tal findes efter den anførte Form; til Ex. at endere 468.

$$468 = 460 + 8 = a + b$$

$$468^3 = (460 + 8)^3 = (a + b)^3$$

| | | |
|-----------|-----------------------------|-----------|
| $468^3 =$ | $40^3 =$ | 64000 |
| $460^3 =$ | $3 \times 40^2 \times 6 =$ | 28800 |
| | $3 \times 40 \times 6^2 =$ | 4320 |
| | $6^3 =$ | 216 |
| $468^3 =$ | $3 \times 460^2 \times 8 =$ | 5078400 |
| | $3 \times 460 \times 8^2 =$ | 88320 |
| | $8^3 =$ | 512 |
| | | 102503232 |

Cubus af ethvert heelt Tal, som bestaar af to eller flere Sifre, lader sig sammensætte af de blotte Sifre; naar man udsetter de Dele, hvoraf efter forrige § det fuldkomne Cubis-Tal skal bestaae, saaledes at det sidste Siffer af hver Deel rykkes en Plads længere mod høire, s. Ex.

$$27^3 = 2^3 = 8 \dots$$

$$3 \times 2^2 \times 7 = 84$$

$$3 \times 2 \times 7^2 = 294$$

$$7^3 = 343$$

$$19683$$

Bevis: $27 = 20 + 7$ dets Cubus bestaaer altsaa af I) $20^3 = 8000$, II) $3 \times 20^2 \times 7 = 8400$, III) $3 \times 20 \times 7^2 = 2940$ og IV) $7^3 = 343$ ved at sammenligne disse Dele med det vi ved den umiddelbare Sammensætning fik ud, vil det findes at være just de samme Dele, thi 8 paa fjerde Plads fra høire mod venstre er $= 8000$. 84 paa tredie Plads $= 8400$. 294 paa anden $= 2940$, og endelig 343 paa Tensernes Plads $= 343$ (§ 13).

Paa samme Maade findes Cubus af 123.

$$123^3 = 1^3 = 1 \dots \dots$$

$$3 \times 1^2 \times 2 = 6 \dots \dots$$

$$3 \times 1 \times 2^2 = 12 \dots \dots$$

$$2^3 = 8 \dots \dots$$

$$3 \times 12^2 \times 3 = 1296 \dots$$

$$3 \times 12 \times 3^2 = 324 \dots$$

$$3^3 = 27$$

$$1860867$$

thi opløses 123 efter forrige § i $120 + 3$, og dets Cubus søges efter Formen, vil den, naar Nullerne bortkastes, bestaae just af de nu fundne Tal.

1. Till. Det første Ziffer i Roden undtagen, giver altsaa ethvert af de følgende, tre nye Zifre i Cubik-Tallet; hvoraf det første indeholder Egenerne af det tredobbelte Produkt af de forrige Zifres Kvadrat og det nye, det andet Egenerne af det tredobbelte Produkt af de forrige Zifre og dets Kvadrat, det tredje Egenerne af dets Cubus.

2. Till. Inddeles altsaa et givet Cubiktal i Classer fra høire til venstre, saa at der kommer tre Zifre i hver Classe, den første undtagen (der kan have eet, to eller tre, eftersom Cubus af Rodens høieste Ziffer indeholder eet, to eller tre Zifre), saa vil Roden bestaae af saa mange Zifre, som der ere Classer; og man vil, naar man begynder fra venstre i den første Classe finde Cubus af Rodens første Ziffer; i den første og anden Classe, Cubus af Rodens to første Zifre o. s. f.

§. 62.

Cubikroden af ethvert givet heelt Tal findes nu let efter følgende Regler:

1) Man indeler Tallet i Classer fra høire mod venstre tre Zifre i hver Classe, Roden har da saa mange Zifre, som der ere Classer (§ 61).

2) Man søger i Cubik-Tabellen det høieste Cubiktal, der kan trækkes fra første Classens Zifre (fra venstre regnet), dets Rod. bliver da det første Ziffer i den søgte Rod (§ 61. Till. 2).

3) Den

3) Denne Cubus subtraheres fra første Classes Zifre, og til den overblevne Differenti nedsættes anden Classe; det tredobbelte af det fundne Rod-Ziffers Quadrats hensættes i en Parenthese, saa at dets Eenere kommer under det første af anden Classes Zifre, og dermed divideres de overstaaende Tal; den da fundne Quotient er Rodens andet Ziffer; Denne multipliceres med Divisor, og Produktet (som er just det tredobbelte Produkt af det første Rod-Ziffers Quadrats multipliceret med det andet) hensættes, saa at dets Eenere kommer under det første af anden Classes Zifre. Dernæst søges det tredobbelte Produkt af det første Rod-Ziffer og det andets Quadrats, som sættes med dets Eenere under anden Classes andet Ziffer; endelig hensættes Cubus af Rodens andet Ziffer, saa at dens Eenere kommer under anden Classes tredje Ziffer. Disse tre Dele adderes nu tilfammen, er den da udkommende Sum større end de lige overstaaende Tal (som er den af første Classe blevne Differenti forenet med anden Classe), da er Rodens andet Ziffer taget for høit. Er den derimod net op saa stor eller mindre, da er det fundne Ziffer virkelig det andet Ziffer af den forlangte Rod.

4) Den fundne Sum subtraheres nu fra de lige overstaaende Tal, og til den da blevne Differenti nedsættes tredje Classes Zifre. Af de to al-

lerede fundne Rod, Zifres Kvadrat tages nu det tredobbelte og hensættes, at Tænerne komme under det første af tredje Classes Zifre; dermed divideres nu de ligeover staaende Tal, og den fundne Quotient er Rodens tredje Ziffer; nu fortfares i samme Orden, som i No. 3 er forklaret, og saaledes vedbliver man med 4, 5 og 6 Klasse ic.

5) Bliver tilsidst intet tilovers, saa har man fundet den forlangte Rod fuldkommen nxiagtigt, og det givne Tal er et fuldkomment Cubiktal. Bliver der derimod en Rest, saa er det givne Tal et ufuldkomment Cubiktal, og dets Rod et irrational Tal.

Rigtigheden af denne Fremgangsmaade indsees saavel af de næst foregaaende her, som og deraf, at, naar den, efter disse Regler af et givet Tal fundne Cubif-Rod, igien ophies til tredje Værdighed eller cuberes, udfommer just det givne Tal.

Tal-Exempler:

$$\sqrt[3]{15625}. \quad \sqrt[3]{1860867}. \quad \sqrt[3]{80677568161}.$$

$$\sqrt[3]{15|625\ddagger25}$$

$$2^3 = 8$$

$$7625$$

$$3 \times 2^2 = (12)$$

$$3 \times 2^2 \times 5 = 60$$

$$3 \times 2 \times 5^2 = 150$$

$$5^3 = 125$$

$$7625$$

Efter Reglen 1, deles Tallet ind i 2 Classer. Tallet 8 hensættes efter No. 2, og dets Rod er efter samme Rodens første Ziffer; efter No. 3 sættes Divisoren 12 og Produkterne 60, 150 og 125, hver paa sit Sted, og samlede til en Sum subtraheres de fra de overstaende Tal efter No. 4. Da intet blev tilovers, er efter No. 5 den forlangte Rod næagtig 25, og Tallet var altsaa et fuldkomment Cubital.

$$\begin{array}{r}
 1^3 = \sqrt[3]{1 \mid 860 \mid 867 \mid 123} \\
 \hline
 860 \\
 3 \times 1^2 = (3) \\
 3 \times 1^2 \times 2 = \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 12 \\ 8 \end{array} \right. \\
 3 \times 1 \times 2^2 = \\
 2^3 = \\
 \hline
 728 \\
 132,867 \\
 3 \times 12^2 = (43 \ 2) \\
 3 \times 12^2 \times 3 = \left\{ \begin{array}{l} 129 \ 6 \\ 3 \ 24 \\ 27 \end{array} \right. \\
 3 \times 12 \times 3^2 = \\
 3^3 = \\
 \hline
 132,867 \\
 \hline
 \text{.....}
 \end{array}$$

Anm. 3 Steden for efter 3die og 4de Reg. at samle de tre Produkter til een Sum, og derpaa subtrahere denne fra de lige over staaende Tal kan ethvert Produkt, sat paa sit Sted efter 3die Reg., strax subtraheres fra det lige over staaende Tal, hvilket almindelig bruges i den praktiske Regning. Det anførte Exempel $\sqrt[3]{15625}$ vilde da staae saaledes:

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{15|625\overline{)25}} \\ 8| \quad | \end{array}$$

$$7|6$$

$$(12)$$

$$60$$

$$162$$

$$150$$

$$125$$

$$125$$

$$000$$

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{80|677|568|1614321} \\ 64| \end{array}$$

16,677

(48)

144

227

108

1197

27

1170,568

(5547)

11094

6116

516

56008

8

56000,161

(55987 2)

129 6

129 6

I

I

§. 63.

Cubif-Roden af en Decimalbrøk findes, ved at sige til Brøken paa høire Side, saa mange Nuller man vil (dog at man iagttager, at Decimalernes Antal bliver deelbar med 3), og derpaa udtrefte

No.

Roden efter § 62. Den fundne Rod vil da have saa mange Decimaler, som der vare Classer af Decimaler i Tallet, hvoraf Roden skulde udtrækkes. B. Ex. Skal Cubit-Roden søges af 78,4, seer det saaledes: $78,4 \equiv 78,400,000,000$ (§ 49.)

$$\sqrt[3]{78,4} \equiv \sqrt[3]{78,400,000,000} \dagger 4,279$$

$$\begin{array}{r}
 \underline{64} \\
 14,400 \\
 (48) \\
 \underline{96} \\
 480 \\
 \underline{48} \\
 4320 \\
 \underline{8} \\
 4312,000 \\
 (5292) \\
 \underline{37044} \\
 60760 \\
 \underline{6174} \\
 545760 \\
 \underline{343} \\
 545517,000 \\
 (546987) \\
 \underline{4922883} \\
 5322870 \\
 \underline{103761} \\
 52191090 \\
 \underline{729} \\
 52190361
 \end{array}$$

Den søgte Cubic-Rod af 78,4 fandtes altsaa at være 4,279; men det overblevne viser, at Roden ikke nøiagtig er funden; man kan, ved at tilføie flere Nuller, blive ved at fortsætte Udtrækningen, og hvor længe dette bør skee, bedømmes efter den større eller mindre Grad af Nøiagtighed, som Regningen udfræver.

1. Till. Cubic-Roden af enhver Brøk findes altsaa lettest, ved at forandre den til en Decimalbrøk, og deraf uddrage Roden. S. Ex. $\sqrt[3]{\frac{1}{7}}$.

$$\frac{1}{7} = 0,1428571428 \dots \text{altsaa } \sqrt[3]{\frac{1}{7}} =$$

$$\sqrt[3]{0,1428571428} = 0,522 \dots$$

$$\begin{array}{r} 85,5 \\ (147) \\ 735 \\ \hline 1207 | \\ 525 \\ \hline 6821 \\ 125 \\ \hline 6696,428 \\ (1687 \ 5) \\ 5062 \ 5 \\ \hline 1633,92 \\ 20 \ 25 \\ \hline 1613 \ 678 \\ 27 \\ \hline 1613 \ 651 \end{array}$$

2. Till.

2. Tillæg. Cubik-Roden af et ufuldkomment Cubik-Tal, findes ved Tilnærmelse i Decimalbrøf ved at føie til Tallets høire Side, saa mange Gange tre Nuller, som man vil have Decimaler i Roden, og deraf at udtrække Cubik-Roden efter § 62, f. Ex. $\sqrt[3]{2}$ findes saaledes:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt[3]{2 \mid 000 \mid 000 \mid 000} 1,259 \\
 \underline{1} \\
 1,000 \\
 (3) \\
 \underline{6} \\
 40 \\
 \underline{12} \\
 280 \\
 \underline{8} \\
 272,000 \\
 (43 \ 2) \\
 \underline{216 \ 0} \\
 56 \ 00 \\
 \underline{9 \ 00} \\
 47 \ 000 \\
 \underline{125} \\
 46875,000 \\
 (4687 \ 5) \\
 \underline{42187 \ 5} \\
 4688 \ 50 \\
 \underline{303 \ 75} \\
 4384 \ 750 \\
 \underline{729} \\
 4384 \ 021
 \end{array}$$

Eh! da $2 \equiv 2,000,000,000$ (§ 49), saa er
 $\sqrt[3]{2} \equiv \sqrt[3]{2,000,000,000} \equiv 1,259$. Ved at
 tilføie flere Classer af Nuller, vil man kunde finde
 Roden saa nøiagtig, som Omstændighederne ud-
 førdre, men fuldkomment nøiagtig lader den sig
 ikke bestemme (see § 54).

Om Forhold og Proportioner.

§. 64.

Forhold (ratio) kaldes en Sammenligning
 imellem 2 ligeartede Størrelser a og b ; ved Sam-
 menligningen kan have Hensyn enten til Størrel-
 sernes Forskiel α : den tredje Størrelse d , som maa
 legges til eller tages fra a , for at frembringe b ,
 og da kaldes Forholdet arithmetisk: eller og til
 det Tal m , som viser hvor mange Gange b inde-
 holdes i a eller a i b , i dette Tilfælde hedder det
 et geometrisk Forhold. F. Ex., sammenlignes
 Tallene 20 og 5 med Hensyn til Tallet 15, som
 maa tages fra 20, for at frembringe 5, da be-
 trægtes disse Tals arithmetiske Forhold til hinan-
 den; have derimod Hensyn til, hvor mange Gan-
 ge 5 indeholdes i 20, da undersøges deres geo-
 metriske Forhold.

I. Till. Til et Forhold hører altsaa nød-
 vendigt to Størrelser, som kaldes Lede i Forhol-
 det

Det (termini rationis), hvoraf det, der sættes først kaldes det foregaaende (antecedens), og det der sættes sidst det efterfølgende (consequens). Begge disse Led maa efter § 17 og 25 altid være ligeartede Størrelser. Den Størrelse d i et arithmetisk Forhold, som legges til eller tages fra det foregaaende Led, for at frembringe det efterfølgende, kaldes Forholds Navn eller Forholds Størrelse (nomen rationis); og Tallet m i et geometrisk Forhold, som viser, hvor mange Gange det ene Led indeholdes i det andet, kaldes Forholds Exponent (exponens rationis).

2. Till. Til at udtrykke det arithmetiske Forhold imellem to Størrelser, betiener man sig af Subtractions-Tegnet, som sættes imellem Størrelserne saaledes: $a - b$, $8 - 13$, og læses a forholder sig til b ; 8 forholder sig til 13, og til at betegne det geometriske Forhold, bruger man Divisions-Tegnet ($:$), der sættes imellem de sammenlignede Størrelser, f. Ex. $a : b$; $24 : 8$, som læses a forholder sig til b ; og 24 forholder sig til 8.

Anmærk. For i denne Lære om Forhold at undgaae Forvirring af Divisionen og det geometriske Forhold, vil jeg udtrykke Divisionen ved Brøk-Tegnet, at a divideres med b , skrives altsaa steds $\frac{a}{b}$, og Tegnet ($:$) bruges alene til at tilkiendegive to Størrelses geometriske Forhold.

3. Till.

3. Till. Uagtet modsatte Størrelser vel ikke ere ligeartede, saa kan de dog (§ 39) ansees som ligeartede, kun at de adderes, i Steden for at subtraheres, og subtraheres i Steden for at adderes, og altsaa kan de sammenlignes med hinanden, og Forhold har Sted imellem dem. Ligesom og den ene af to modsatte Størrelser kan frembringes af den anden, ved Addition, Subtraction, Multiplication og Division.

Anm. Efter at have fremsat disse Forklaringer, troer jeg det indsees let, hvor vigtig det er at kiende og undersøge Størrelsernes geometriske Forhold, da al deres Udmaaling, som er Mathematikens Hoved-Gienstand, beroer derpaa (§ 2). De Gamle gave ogsaa allene det geometriske Forhold, Navn af Forhold, og naar man endnu i Mathematiken taler om Forhold, uden noget Tillægs Ord, forstaes altid det geometriske Forhold. Det arithmetiske Forhold synes derimod ikke at være af saa stor Betydning, og kunde, uden at betragtes som et særskildt Forhold, henføres under Subtractionen. Dog da det findes i alle nyere mathematiske Lærebøger særskildt afhandlet, vil jeg og her kortelig anføre de vigtigste dithenhørende Sætninger.

§. 65.

Et arithmetisk Forholds Størrelse bestemmes ved Forholds Navnet (§ 64. 1 Till.); og to arithmetiske Forhold, der have samme Forholds Navn,
ere

ere lige store, f. Ex. Forholdet $a - (a \pm d)$ er ligestort med Forholdet $b - (b \pm d)$, da d er

Forholds-Navnet i begge; ligeledes $13 \overset{4}{-} 17 =$

$8 \overset{4}{-} 12$, da 4 er Forholds Navn i begge. Har to Forhold derimod ulige Forholds Navn, da siges det Forhold, som har størst Forholds Navn, at være større eller høiere, end det der har mindre. F. Ex. Forholdet $5 - 12$ er større end Forholdet $13 - 17$, fordi Forholds Navnet 7 er > 4 .

To lige store arithmetiske Forhold, forbundne med Lighedstegn, udgøre en arithmetisk Proportion: saaledes siges de fire Størrelser a, b, c, d at være arithmetisk proportionale, eller at udgøre en arithmetisk Proportion, naar $a - b = c - d$, og læses a forholder sig til b , som c til d . Ligeledes $7 - 11 = 15 - 19$, og $13 - 8 = 17 - 12$.

I. Till. Enhver arithmetisk Proportion bestaaer altsaa af 4 Lede; hvoraf det første og fjerde, som i foregaaende Exempler a og d , 7 og 19 falder de yderste Lede, og andet og tredje, som b og c , 11 og 15 de mellemliggende. De foregaaende Led i begge Forholdene, hvoraf Proportionen bestaaer, nemlig det første og tredje, falder eensstaaende; ligeledes begge de efterfølgende, nemlig andet og fjerde.

2. Till.

2. Till. Naar andet og tredje (eller begge de mellemste) Led i en arithmetisk Proportion ere lige, falder Proportionen sammenhængende (continua), og Størrelsen, der er både andet og tredje Led, falder en arithmetisk middel, eller mellemproportional Størrelse. S. Ex. $8 - 13 = 13 - 18$, hvor 13 er en middel proportional Størrelse mellem 8 og 18.

§. 66.

I enhver arithmetisk Proportion er Summen af de to yderste Led lig Summen af de to mellemste. S. Ex. naar $a - b = c - g$, saa er $a + g = b + c$, og naar $7 - 11 = 15 - 19$, saa er $7 + 19 = 15 + 11$.

Beviis. Lad i Forholdet $a - b$ Forholds Ravnet være d , saa er $b = a - d$ (§ 64) er nu Proportionen rigtig, maa (§ 65) i det andet Forhold $c - g$ Forholds Ravnet ogsaa være d , og følgelig g være $= c + d$. De to yderste Led $a + g$ er altsaa $= a + c + d$, og de to mellemste $b + c = a - d + c$, men disse Summer $a + c + d$ og $a - d + c$ bestaae just af de samme Dele, og ere følgelig lige store, altsaa og $a + g = b + c$.

Ved Tal-Exempler lader det sig ligeledes vise, da de efterfølgende Led ere sammensatte af de foregaaende

thi $m \times a = ma$ men i Forholdet $a : ma$ er Exponenten $\frac{1}{m}$ thi $ma \times \frac{1}{m} = a$. Da begge Ledene i et Forhold ere ligeartede Størrelser kan Exponenten altid findes, naar Ledene ere givne, ved at dividere det foregaaende med det efterfølgende p. ved at see hvor mange Gange det efterfølgende indeholdes i det foregaaende § 25.

1. Till. Indeholdes det efterfølgende Led saaledes i det foregaaende at intet bliver tilovers, eller er det en aliquot Deel deraf (§ 28.) da bliver Exponenten et heelt Tal; f. Ex. i Forholdet $ma : a$ er Exponenten m det er a indeholdes m gange i ma . Men indeholdes ikke det hele efterfølgende Led, men vel en aliquot Deel deraf netop nogle Gange i det foregaaende da bliver Exponenten en Brøk. F. Ex. i Forholdet $a : c$ naar c antages op løst i n lige Deele og a findes at være $= m \times \frac{1}{n} c$ da vil Exponenten i Forholdet $a : c$ være

$$\frac{m}{n} \text{ thi Exponenten er } \frac{a}{c} = \frac{m \times \frac{1}{n} c}{c} =$$

$$\frac{m \times \frac{1}{n} c}{n \times \frac{1}{n} c} = \frac{m}{n} \quad \text{I begge disse Tilfælde, siges}$$

Forholdet at være rationalt og Exponenten et bestemt Tal.

2. Till. Kan derimod hverken det efterfølgende Led eller nogen aliquot Deel deraf nogagtig udmaale det foregaaende, da siges Forholdet at være

være irrationale. Men disse Forhold faa vi i Geometrien Løslighed til at kiende.

§. 70.

To geometriske Forhold, der have samme Exponenter, siges at være lige store f. Ex. Forholdet $ma : a$ er lige stort med Forholdet $mb : b$ da m er Exponenten i begge; $20 : 5 = 12 : 3$ thi $4 = 4$. To saadane lige store geometriske Forhold forbundne med Lighedss Tegn udgiøre en geometrisk Proportion: og de fire Størrelser som udgiøre Ledene i disse to Forhold siges at være geometrisk proportionale. S. Ex. $ma : a = mb : b$. $20 : 5 = 12 : 3$. $8 : 24 = 6 : 18$.

Anmærk. Ledene i en geometrisk Proportion benævnes som i en arithmetisk; de to yderste ere ma og b , 20 og 3 . De to mellemste a og mb , 5 og 12 . so foregaaende som ma og mb efterfølgende som a og b hvilke kaldes eenstaaende Lede (§ 65, I. Till.).

Till. Ere i en geometrisk Proportion samme Størrelse baade andet og tredje Led, kaldes den en Sammenhængende geometrisk Proportion: og denne Størrelse en geometrisk mellem Proportional Størrelse. S. Ex. $a : b = a : b$, $63 : 21 = 21 : 7$. $a : a = b : b$ i 79. §. 70. Proportionen gik i 79 og

I enhver geometrisk Proportion $a : b :: c : d$ er Produktet af de yderste Lede $a d$ lige med Produktet af de mellemste $b c$.

Bev. Naar i Forholdet $a : b$ Exponenten antages at være m da er (§ 69.) $a :: m b$ er nu Proportionen rigtig maa efter §. 70. i Forholdet $c : d$ Exponenten ogsaa være m og altsaa $c :: m d$. Produktet af de yderste Lede $a d$ vil da være $m b \times d :: m b d$ og Produktet af de mellemste $b c$ vil være $b \times m d :: b m d$. Men nu er $m b d :: b m d$ og folgelig $a d :: b c$. Ligeledes er i Proportionen $12 : 4 :: 15 : 5$ Produktet af de yderste Lede $5 \times 12 ::$ Produktet af de mellemste 4×15 . Thi efter §. 69. kan de efterfølgende Lede udtrykkes ved de foregaaende og Exponenten, hvorved det viser sig, at de mellemste og yderste Lede i en rigtig geometrisk Proportion altid bestaae af de samme Faktorer. Den anførte Proportion kunde f. Ex. udtrykkes saaledes:

$$12 : \frac{1}{3} :: 15 : \frac{1}{5}$$

og altsaa $\frac{12}{3} \times \frac{1}{5} :: \frac{15}{5} \times \frac{1}{3}$

Eller: Den sammenhængende geometrisk Proportion er Produktet af den yderste Lede, som fortomt Quadreret af det ene mellemste thi i følge det nylig anførte Bevis er i Proportionen $a : b$

$$= b$$

$\equiv b : c$; $ac \equiv bb$ men bb er $\equiv b^2$ (§. 52.).
 og i Proportionen $63 : 21 \equiv 21 : 7$ er $63 \times$
 $7 \equiv 21 \times 21$ men 21×21 er $\equiv 21^2$ og
 følgelig $63 \times 7 \equiv 21^2$.

Ex. 2. Er Produktet af to Størrelser ab lige stort med Produktet af to andre cd saa udgiøre disse fire Størrelser en geometrisk Proportion, hvort Faktorerne til det ene Produkt ere de yderste, og de andre de mellemste Led: thi naar

$ab \equiv cd$ saa er $a \equiv \frac{cd}{b}$ (§. 38. 5.) altsaa

$$\frac{a}{c} \equiv \frac{d}{b} \text{ og følgelig } a : c \equiv d : b.$$

Ex. 3. Er Produktet af to Størrelser ab lig Kvadratet af en tredje m , da er denne en mellemproportional Størrelse imellem de to, eller andet og tredje Led i en sammenhængende geometrisk Proportion.

Thi naar $m^2 \equiv ab$ saa er $a \equiv \frac{m^2}{b}$ og $\frac{a}{m} \equiv \frac{m}{b}$

(§. 38. 5.) og følgelig $a : m \equiv m : b$. (§. 70.)

§. 73.

Ud tre med Tal eller almindelige Tegn udtrykte Størrelser a, b, c i en geometrisk Proportion findes den tredje proportional x , ved at multiplicere de to mellemste b, c og dividere det fundne Produkt bc med

med den første a . Saaledes findes $x = \frac{bc}{a}$.

f. Ex. $12 : 8 = 16 : x$ da er $x = \frac{8 \times 16}{12} = 10\frac{2}{3}$.

Bev. Naar x er $= \frac{bc}{a}$, saa er $ax =$

bc og altsaa $a : b = c : x$. (§. 70. Till. 2.)

Till. I mellem to med Tall eller almindelige Tegn udtrykte Størrelser a, b findes en geometrisk mellem proportional Størrelse x , ved at multiplicere de givne og af Produktet udtrække Kvadratroden. Saaledes bliver $x = \sqrt{ab}$ f. Ex. naar $18 : x = x : 8$ saa er $x = \sqrt{18 \times 8} = 12$. Thi er $x = \sqrt{ab}$ saa er $x^2 = ab$ og følgelig $a : x = x : b$. (§. 70. Till. 3.)

§. 73.

Da en geometrisk Proportion bestaaer af to ligestore Forholde, og Forholdenes Ligestorhed beror paa deres ligestore Exponenter, saa indsees let at enhver given geometrisk Proportion kan taale alle Forandringer hvorved enten Exponenterne i begge Forholde blive aldeles uforandrede eller og ligemeget forandrede.

Man kan altsaa naar en Proportion er given f. Ex. $ma : a = mb : b$ frembringe en anden

Ved

1) Ved at omsætte de foregaaende og efterfølgende Lede (invertendo); $a : ma = b : mb$ thi i den givne Proportion er Exponenten $m = m$ og altsaa $\frac{1}{m} = \frac{1}{m}$ og følgelig $a : ma = b : mb$ (§. 70.).

2) Ved at tage Summen eller Differencen af begge de foregaaende til Summen eller Differencen af begge de efterfølgende Lede (summando et differentiando) saaledes faaes af Proportionen $ma : a = mb : b$. α) summando $ma + mb : a + b = mb : b$; β) differentiando $ma - mb : a - b = mb : b$ i Begge Tilfælde blive Exponenterne uforandrede thi $\frac{ma + mb}{a + b}$ er $= m$ og ligeledes er $\frac{ma - mb}{a - b} = m$. (§. 46.)

3) Ved at tage Summen eller Differencen af det foregaaende og efterfølgende Led til det efterfølgende i begge Forhold, (componendo et dividendo). Ex. Af den givne Proportion $ma : a = mb : b$ faaes saaledes α) componendo $(ma + a) : a = (mb + b) : b$, β) dividendo $(ma - a) : a = (mb - b) : b$. Exponenterne forandres her i begge Forhold lige meget nemlig i det første Tilfælde ved at forges $\frac{ma + a}{a} = m + 1$ og $\frac{mb + b}{b} = m + 1$ med en Enhed thi $\frac{ma + a}{a} = \frac{mb + b}{b}$

$\equiv m + 1$. og i det andet ved at forhandles
paa samme Maade da $\frac{ma}{a} \equiv \frac{mb}{b}$

$\equiv m - 1$.

4) Ved at ombytte andet og tredje Led
(vicissim v. permutando) er f. Ex. $ma : a \equiv$
 $mb : b$ saa er ogsaa $ma : mb \equiv a : b$ thi $\frac{ma}{mb}$
er $\equiv \frac{a}{b}$ og altsaa Proportionen rigtig.

Ann. Enhver Proportion kan desuden forandres ved
at multiplicere eller dividere med et og samme
Tal enten alle Ledene; eller de to foregaaende,
eller de to efterfølgende; eller de to i det første
Forhold, eller de to i det sidste. - Ogsaa ved at mul-
tiplicere eller dividere begge Ledene i det første For-
hold med et, og Ledene i det andet med et andet Tal

§. 74.

Naar Ledene i to Proportioner multipli-
ceres efter Ordenen med hinanden give Pro-
dukterne en rigtig Proportion. S. Ex.

naar: $ma : a \equiv mb : b$ obaendog
og $nc : d \equiv ne : f$ omabivis
saa er $mac : afd \equiv mbe : bnf$

Bemerk. Hvis to Proportioner er
rekte: m i den anden saelig $m \equiv m$ og $n \equiv$
altsaa $mn \equiv mn$. Nu er i den frembragte

Pro.

$$\text{Proportion } \frac{ma}{ac} = \frac{mb}{bd} = \frac{m}{n} \quad (\S. 46)$$

og altsaa er den rigtig. (§. 76)

Till. 1. Ere to Proportioner af den Art at de efterfølgende Led i den første ere de foregaaende i den anden; saa forholder det første foregaaende i den første Proportion sig til det første efterfølgende i den anden som det andet foregaaende i den første til det andet efterfølgende i den anden.

$$\begin{array}{l} \S. \text{ Ex. er} \quad ma : a = mb : b \\ \text{og} \quad a : c = b : d \end{array}$$

saa er (ordinatim et ex æquo) $ma : c = mb : d$ thi $maa : ac = mbb : bd$ (§. 74.) og naar Ledene i det første Forhold divideres med a og i det andet med b (§. 73 Anm.) saa fremkommer $ma : c = mb : d$.

Till. 2. Ere to Proportioner af den Art at det andet Led i den første er det første i den anden og det tredje i den første det fjerde i den anden: saa forholder det første Led i den første Proportion sig til det andet i den anden, som det tredje i den anden til det fjerde i den første.

$$\begin{array}{l} \S. \text{ Ex. er} \quad ma : a = mb : b \\ \text{og} \quad a : c = d : mb \end{array}$$

saa er (perturbate et ex æquo) $ma : c = d : b$

thi

thi

thi efter §. 74. er $ma : ac = mbd : bmb$ og naar (§. 73. Anm.) Ledene i det først Forhold divideres med a og i det andet med mb saa er $ma : c = d : b$.

§. 75.

Staar en Størrelse A i en saadan Forbindelse med en anden Størrelse B at naar en vis Deel af den eene a giver en Deel af den anden b , saa skal ogsaa a gientaget et vist Antal gange m give b gientaget ligesaa mange Gange: saa siges A og B at være i et direct Forhold. $\therefore a : m a = b : m b$, og $a : b = m a : m b$; Et saadant Forhold har Sted imellem Værdier og deres Værdie. Er derimod en Størrelse C i saadan Forbindelse med en Størrelse D at naar en vis Deel af den eene c giver en Deel af den anden d ; saa skal c gientaget et vist Antal Gange m , give d formindsket ligesaa mange Gange $\therefore m c$ skal give $\frac{1}{m} d = \frac{d}{m}$: saa siges C og D at være i et omvendt Forhold (ratio inversa) $\therefore c : m c = d : \frac{1}{m} d = c : d = m c : \frac{1}{m} d$. Et saadant Forhold finder Sted mellem Antallet af Arbejdere som behøves til et vist Værk, og Tiden de dertil behøve.

$a : b = m a : m b$ (overensetning) maa

Anvendelse af de geometriske Proportioner paa den praktiske Regning.

§. 76.

Den hele saakaldte Regula de tri (de tribus numeris, Reglen om tre) er allene Anvendelsen af det (§. 72.) forklarede Problem til 3 givne Størrelser at finde den fjerde geometrisk proportionale. Oplosningen ved ethvert Regula de tri Stykke hvor altid tre Tal ere givne, er altsaa at multiplicere andet og tredie Led med hinanden og dividere Productet med det første Led. Den udsørgeligere Forklaring om Anvendelsen heraf paa Regningsspørgsmaal som forekomme i det daglige Liv hører ikke til den rene Mathematik; men til den anvendte eller praktiske Regnekunst; jeg vil derfor indskrænke mig blot til at vise dens Brug i nogle Hoved-Tilfælde.

Anm. Hovedsagen ved denne Regels Anvendelse er at kunde bedømme om de givne Størrelser ere af den Art at ethvert Par Dele af den ene ere proportionale til et Par Dele af den anden, og hvorledes Ledene i denne Proportion maa ordnes; dette lader sig nu let gjøre efter den (§. 75.) givne Forklaring; og eftersom Størrelserne da ere i et direct eller omvendt Forhold; finder den ordentlige (directa) eller omvendte (inversa) Regula de tri Sted.

De vigtigste Tilfælde som kan henregnes til

begge ere

a) til den saakaldte ordentlig Regula de tri

1) Beregning af Vare og deres Værdie, thi da m Gange en vis Deel Vare giver m Gange mere Værdi, saa forholde Værene sig som deres Værdi. Ex. naar 3 Alen koste 8 Rdl. hvad koste 9 Alen, og naar 2 Alen koste 7 Rdl. hvormange Alen faaes da for 100 Rdl. opfattes saaledes:

$$3 \text{ Alen} : 9 \text{ Alen} = 8 \text{ Rdl.} : x \text{ Rdl.}$$

$$7 \text{ Rdl.} : 100 \text{ Rdl.} = 2 \text{ Alen} : x \text{ Alen.}$$

2) Rentes Regning: Da m Gange større Capital giver i samme Tid m Gange mere Rente, og samme Capital i n Gange længere Tid n Gange større Rente: saa forholder Renterne sig som Capitalerne, naar Tiden er den samme; og som Tiderne naar Capitalen er den samme.

Ex. Hvormeget er Renten af 10000 Rdl. i et Aar, naar 100 Rdl. give 4 Rdl. og hvormegen Rente giver en vis Capital i 12 Aar, naar den i et Aar give 120 Rdl.

$$100 \text{ Rdl.} : 4 \text{ Rdl.} = 10000 \text{ Rdl.} : x \text{ Rdl.}$$

$$10000 \text{ Rdl.} : 120 \text{ Rdl.} = x \text{ Rdl.} : 12 \text{ Aar.}$$

$$1 \text{ Aar} : 12 \text{ Aar} = 120 \text{ Rdl.} : x \text{ Rdl.}$$

$$= 1440 \text{ Rdl.}$$

3. Reductions-Regning: Da en benyttet Størrelse forvandles til en anden. F. Ex. een Lønde er 8 Skiepper, altsaa er m Lønder $= m$ Gange 8 Skiepper, folgelig forholder en Lønde sig til m Lønder som 8 Skiepper til m Gange 8 Skiepper. Ligeledes giøre 13913 Pariser Fod 14400 Danske Fod og m Gange flere af de første m Gange flere af de sidste. Altsaa forholde 13913 Pariser Fod sig til ethvert andet Antal deraf: som 14400 Danske Fod til et Antal deraf som søger til hiint. F. Ex. hvor mange Skiepper giøre 384 Lønder, x Lønder : 384 Lønder. $=$ 8 Skiepper : x Skiepper. $=$ 3072 Skiepper.

Hvormange Danske Fod giøre 210 Par. Fod.
 $13913 \text{ P. F.} : 210 \text{ P. F.} = 14400 \text{ D. F.}$
 $x \text{ D. F.} = 217 \frac{4879}{13913} \text{ D. Fod.}$

b) Et den omvendte (inversa) Regula-de tri høre

1) Beregning af de Arbejdere og den Tid der behøves til et Arbeids Guldførelse: Thi da m Gange flere Arbejdere bruge n Gange mindre Tid, saa forholder Arbejdernes Antal sig omvendt som Tiderne. Man maa altsaa omvende Forholdet af de givne Størrelser. F. Ex. Naar 10 Arbejdere giøre et vist Arbejde i 10 Dage, hvor lang Tid vilde da 15 Arbejdere bruge: hvortil man opfatte

$$10 \text{ D.} : 15 \text{ D.} = 10 \text{ D.} : x \text{ D.}$$

7 Arbeidere : 15 Arbeidere \equiv 12 Dage : x Dage,
 da vilde der komme et rigtigst fjerde Leed, thi
 Dagenes Antal vører ikke som Arbeidernes, men
 tager af (§. 75.) man maa altsaa sette omvendt.

15 Arbeid. : 7 Arbeid. \equiv 12 Dage : x Dage

og x bliver $\equiv \frac{12 \times 7}{15} = 5\frac{2}{3} = 5\frac{2}{3}$ Dag.

2) Beregning af Tiden i hvilken en given
 Capital kan give samme Rente som en anden
 giver i en vis Tid; som og hvor stor Capita-
 len maa være for i en bestemt Tid at give sam-
 me Rente som en anden Capital i en anden Tid.
 Thi da en m Gange større Capital giver samme
 Rente i en m Gange kortere Tid; saa forholde her
 Capitalerne sig omvendt som Tiderne og her maa
 altsaa bruges det omvendte Forhold.

Exemp. Hovlænge maa 600 Rdl. staa for
 at kunde til samme Procent give ligesaa megen
 Rente som 1000 Rdl. i 4 Maaneder, opsættes
 1000 Rdl. : 600 Rdl. \equiv 4 Maaneder : x
 Maaneder men 600 Rdl. : 1000 Rdl. \equiv 4
 Maan. : x Maan. og x \equiv 6 $\frac{2}{3}$ Maan.

Hvor stor maa den Capital være som til sam-
 me Procent i 7 Maaneder skal give ligesaa megen
 Rente som 1000 Rdl. i 9 Maan.

9 Maan. : 7 Maan. \equiv 1000 Rdl. : x Rdl.

og x findes \equiv 1285 $\frac{1}{3}$ Rdl.

3. Beregning af Længden af Tøjet af
forskjellig Brede som skal anvendes til samme
Brug. Thi da af et m Gange bredere Stykke
fordres m Gange mindre Længde; saa forholder
Længden sig omvendt som Bredden. Ex. Naar
af et Stykke Klæde 10 Quarter bredt bruges 3
Alen til en Kjol, hvor mange Alen bruges der da
naar Klædet er 6 Quarter bredt. Opsattes: 6
Quart. : 10 Quart. \equiv 3 Alen : x Alen og x
findes $\equiv \frac{3 \times 10}{6} = 5$ Alen.

Anm. Den saakaldte Regula de quinque (Reglen om
fem) og Klædereglen ere intet andet end Anvendelse
af hvad der (S. 74.) er lært om geometriske Propor-
tioner; og det maa her være nok allene at gøre den
Anmærkning, at det søgte Led i Proportionen be-
gynder med en Størrelse af samme Art som den der
skal forvandles, det andet ender med en Størrelse af
samme Slags som den søgte, og Størrelsen som skal
forvandles udgør det tredje Led. Ex. Naar 4
Ducater gøre 11 Rdl. og 6 Rdl. gjør 3 Rdl. hvor
mange Rdl. udgiøre da 100 Ducater.

Opsattes saaledes:

11 Rdl.
3 Rdl.
100 Ducater
4 Ducater

Stad; men maa søges i de egentlig positive Størrel-
ser.

Indledning.

G'ndledning.

§. I.

Forklar. Geometrien (Maale Videnskaben) betragter de sammenhængende udstrakte Størrelser (Rummet Prolegom. §. 4.). Det herte uendelige Rum og enhver Deel deraf, for saavidt den er udstrakt til alle Sider kaldes et legemligt Rum (Spacium solidum). Et saadant til alle Sider påstrakt, og begrændst Rum kaldes et geometrisk Legeme (corpus geometricum) da Geometrien bestandig har alene Hensyn til Udstrækningen af Legemet eller Rummet som det opfylder uden at betragte dets øvrige Egenskaber. Saaledes f. Ex. bestemmes Udstrækningen eller den geometriske legemlige Størrelse af en Kugle ved den hule Form hvor den er slagt, uden at der have Hensyn til Materien hvoraf den er i 293] nam nam : 6219

Friends:

Grændserne af et geometrisk Legeme eller de yderste Dele, hvor Legemet ophører kaldes Glæder; Grændserne af en Glade Linier; og Grændserne af en Linie Punkter.

Ex. 1. Legemet (Fig. 1.) har altsaa tre Dimensioner (Udmaalninger) Længde, Brede og Dybde (Hoyde v. Tykkelse). Glæden allene to, Længde og Brede; Linien een nemlig Længde og Punktet ingen.

Anm. Benævnelserne af et Legems Længde, Brede v. s. v. ere vilkørlige; almindeligt kalder man den største Udstrækning Længde og den mindre i samme Glade Brede; og ved Benævnelserne af Hoyde, Dybde og Tykkelse kommer saavel Legemets Beliggenhed som Standpunktet hvorfra det sees i Betragtning.

Ex. 2. Da Grændsen af en Ting ikke er en Deel af Tingen, men tværtimod dens Ophør, saa er Glæden ikke en Deel af Legemet; Linien ikke en Deel af Glæden og Punktet ikke af Linien. Utallige Punkter udgøre derfor ingen Linie; utallige Linier ingen Glade og utallige Glæder intet Legeme. Enhver nok saa liden Deel af et Legeme er altsaa selv et Legeme; af en Glade selv en Glade og af en Linie selv en Linie.

Anm. Heraf sees ogsaa at det aldeles ikke er muligt at tegne geometriske Punkter, Linier og Glæder. Da alle tegnede Punkter, Linier og Glæder ere vir-

fellige physiske Legemer; hvis Udstrækning i Rummet er et geometrisk Legeme. Vi maa altsaa ved de tegnede Punkter affondre (abstrahere) Begrebet fra all Udstrækning i Almindelighed; ved Linier fra all Brede og Tykkelse ved Flader fra all Tykkelse.

§. 2.

Forkl. At dele en sammenhængende Størrelse i to Dele er at bestemme den fælles Grænse for begge Dele; et legemligt Rum deles altsaa ved Flader; en Flade ved Linier og en Linie ved Punkter.

Fikl. Da Rummet overalt hvor man vil, kan begrænses, saa kan man i enhver Flade forestille sig utallige Arter af begrænsede Flader, og i ethvert legemligt Rum utallige Arter af Legemer. Den geometriske Deling af Rummet gaaer altsaa i det uendelige.

§. 3.

Forkl. Tænker man sig et Punkt (som er uden all Udstrækning §. 1.) sat i Bevægelse, saa følger, at det ved sin Bevægelse gienneuløber en Bøje eller en Længde uden all Brede og Tykkelse det er en Linie. Bliwer nu Retningen af Punktet under dets Bevægelse uforandret saa beskriver det en ret Linie (recta) AB (Fig. 2.) og kommer fra et Sted til et andet paa den korteste Bøje.

Forkl.

Forandres derimod bestandig Punktets Retning under Bevægelsen saa beskriver det en krum Linie (*curva*) (Fig. 2.)

Anm. Begrebene om rette og krumme Linier ere saa enkle at de ikke lade sig definere eller gøre forståelige ved Forklaring; da vi nødes at forklare Linie ved Retning og Retning igien ved Linie. Imidlertid indeholder den anførte Forklaring den første og simpelste Forestilling vi kan gøre os om rette og krumme Linier.

Def. En ret Linie AB (Fig. 2.) er altsaa den korteste Afstand imellem dens Ende Punkter A og B ; og ved to Punkter bestemmes Beliggenhed af enhver ret Linie, og naar de ere Endepunkter tillige Linien's Længde. thi da den rette Linie fremkommer ved Punktets uforandrede (i samme Retning fortsatte) Bevægelse og den kun kan være een, saa følger at alle de rette Linier, man i Planerne vilde forestille sig trufne fra A til B maatte falde sammen med AB . Da derimod den krumme Linie fremkommer ved Punktets forandrede Retning, saa følger at der imellem to Punkter gives utallige krumme Linier.

§. 4.

Korfl. En Glade, hvort der fra ethvert givet Punkt til et andet kan trækkes en ret Linie, hvis Dele alle ligge i samme Glade, kaldes en ret

Flade eller **Plan** (*planum*); den hvort dette ikke lader sig gøre er en **krum Flade**.

Till. For saavidt Geometrien besfatter sig alene med Udstrækninger der alle ligge i samme Plan kaldes den **plan Geometrie** eller **Planimetrie**; naar den derimod handler om Legemer og betragter to og flere Flader tillige samt deres Bøjning mod hinanden ja endog krumme Flader, faaer den Navn af **solid** (legemlig) **Geometrie** eller **Stereometrie**.

§. 5.

Grundsæt. (axioma) Udstrækninger der dække hinanden (*congruunt*) 3: der kan lægges saaledes paa hinanden, at deres Grændser falde sammen: eller der i Henseende til **Quantitet** og **Qualitet** ere saa fuldkommen eens, at de kan sættes i hinandens Sted; ere **ligestore** og **ligedanne**.

Anm. Udstrækninger kan være **ligestore** uden at dække hinanden; man maa derfor gjøre Forskiel imellem **Fladers Ligestorhed** af deres **Congruents**; og **Ligestorhed uden Congruents**.

Fordringsf. (postulata) 1) Igiennem to givne Punkter at trække en ret Linie og forlænge den igiennem dens Endepunkter uden Ende til begge Sider. 2) Ved Hielp af Passeren i en Plan at beskrive en Cirkel.

Plan Geometrie.

Om de forskjellige Arter af Figurer og i Særdeleshed om Cirklen.

§. 6.

Forkl. Vøjningen (Heldingen) som to rette Linier i samme Plan, CA og CB (Fig. 3.) have mod hinanden, naar de uden at være hinanden direkte modsatte (d. e. uden at udgiøre en ret Linie) støde sammen i et Punkt C , kaldes en retlinet Plan-Vinkel, undertiden allene en Vinkel (angulus). Punktet C hvor Linierne støde sammen, Vinklens Spids eller Toppunkt (vertex anguli) og Linierne selv dens Sider eller Been (crura).

Anm. En Vinkel benævnes enten allene ved Bogstavet ved dens Toppunkt f. Ex. (Fig. 3.) Vinklerne C og D eller og ved tre Bogstaver, da Toppunktets Bogstav altid maa staa i Midten: f. Ex. (Fig. 3.) Vinklen ACB eller BCA . Undertiden ved smaa Bogstaver som sættes inde i Vøjningen f. Ex. (Fig. 40.) Vinklerne m , n .

Lill. Vinklens Størrelse beroer ikke paa Linierne's Længde men allene paa deres Vøjning eller Straahed mod hinanden; Vinklerne (Fig. 3.) C og D ere altsaa ligestore naar ved at lægges paa hinanden deres Toppunkte og Sider falder sammen
flønt

flisnt Linierne DE og DF ere længere end CA og CB .

§. 7.

Forkl. To Vinkler ACD og DCB (Fig. 4.) som have en fælles Side og et fælles Toppunkt og hvis yderste Sider ere hinanden direkte modsatte d. e. udgiøre en ret Linie kaldes **Nabo- Vinkler** (anguli contrigui s. deinceps positi). Ere de begge ligestore som ACD og DCB (Fig. 5.) kaldes de **rette Vinkler** (anguli recti). En ret Vinkel er altsaa den, der er ligestor med sin Næboevinkel. Enhver anden Vinkel er **flad** og i **Særdeleshed stump**, naar den er større, og **spids**, naar den er mindre end en ret. (Fig. 4.)

Ann. En ret Vinkel betegnes i det følgende bestaa-
dig med Bogstavet R .

Till. En Linie CD (Fig. 5.) siges at være **lodret** (perpendicularis, normalis) paa en anden AB , naar den dermed gjør rette Vinkler.

§. 8.

Forkl. En plan Figur, er en paa alle Si-
der begrænset Plan; da Grænserne af en Plan
ere Linier §. 1. og disse kan være rette eller frum-
me, saa ere plane Figurer retlinede, frumlinet-
te og blandetlinede, efter som deres Grænser
ere

ere rette, Frumme eller baade rette og Frumme Linier.

Till. 1. To rette Linier kan umuligt (§. 3. Till.) have flere end et Punkt tilfælles nemlig det hvori de forlængede stige hinanden; og de kunde altsaa umuligt udgøre Grændserne for en Plan.

Till. 2. De retlinede Figurer inddeles derfor efter Linierne's Antal, der indslutte Planen og kaldes Figurens Sider, i Triangler, Firkanter og Manglekanter (Fig. 9. 10. 11.), eftersom de have tre, fire eller flere Sider.

Forkl. En Triangel er ligesidet (æquilateralum) naar alle tre Sider ere ligestore som AB C (Fig. 13.); ligebenet (æquicrurum, isoscele) naar de to Sider ere ligestore som DFE (Fig. 14.). Uligesidet, naar ingen af Siderne ere ligestore som IGH (Fig. 15.).

En firsidet Figur, kaldes: naar den har fire ligestore Sider og rette Vinkler en Kvadrat; fire ligestore Sider men skæve Vinkler en Rhombus; to og to modstaaende Sider ligestore og rette Vinkler en Rectangel; og naar alene de modstaaende Sider ere ligestore men Vinklerne skæve en Rhomboides (Fig. 45. 46. 47. 51.) alle øvrige firside Figurer faa Navn af Trapezier (Fig. 10.).

De mangesidede Figurer (polygoner) faa efter Sidernes Antal Navn af Femkanter, Sekskanter o. s. v.

De retlinede Figurer ere enten regulære (ordentlige v. regelmæssige) naar alle deres Sider og Vinkler ere ligestore; eller irregulære (uregelmæssige) naar de er ulige store.

§. 9.

Forkl. En Cirkel (circulus) (Fig. 12.) er en Plan, som begrænses af en eeneste i sig selv tilbageløbende frum Linie, hvori ethvert Punkt ligger ligefærdigt borte fra et vist Punkt i den begrænsede Plan som kaldes Cirkelens Middelpunkt (centrum). Den frumme Linie kaldes Cirkelens Peripherie eller Cirkellinien. De rette Linier *CD* og *CB* som kan trækkes fra Centrum til Peripherien og som alle ere lige lange, Radier. En ret Linie *MN* fra et Punkt i Peripherien til et andet kaldes en Korde (Streng) og naar den gaaer igiennem Centrum en Diameter (Siennem-maaler). En Diameter er altsaa saa stor som to Radier, og alle Diametre i samme Cirkel ligestore. En Linie *HI*, der berører Cirklen i et eneste Punkt og ellers ligger aldeles uden for Cirklen kaldes en Tangent (Berøringslinie). Forlænges Chorden udenfor Cirklen har man en Sekant (Skæer

(Stiæringslinie) KL . Fladen, som indsluttes af to Radier og et Stykke af Peripherien kaldes et Udsnit (sector) ACD ; indsluttes den derimod af en Chorde og en Bue et Afsnit (segment) MN .

Till. En Cirkel beskrives, naar en ret Linie CB dreier sig i en Plan omkring dens ubevægelige Endepunkt C . Linien, selv vil da beskrive Cirkelfladen, det ubevægelige Punkt bliver Centrum, og det andet Endepunkt beskriver Peripherien.

Ann. 1. Cirkles beskrives paa Grund heraf ved et Instrument som kaldes Passer eller Cirkel-Passer (§. 5.).

Ann. 2. Peripherien af enhver Cirkel indeles i Almindelighed i 360 ligestore Dele som kaldes Grader. En Grad er altsaa en ubestemt Størrelse og betegner $\frac{1}{360}$ Deel af enhver Cirkels Periphoriæ. Graden inddeles igien til at udmaale mindre Dele af Peripherien i 60 Minuter og en Minut igien i 60 Sekunder. For Kortheds Skyld betegnes Grader ved $^{\circ}$, Minuter ved $'$ og Sekunder ved $''$. S. Ex. $24^{\circ} 35' 47''$ læses 24 Grader 35 Minuter og 47 Sekunder.

§. 10.

Læres. Ere i en og samme Cirkel eller i to ligestore Cirkler Vinklerne ved Centrum (o: de Vinkler hvis Toppunkt ligge i Cirkels Centrum

Centrum og hvis Sider ere Radier) ligestore, da ere Buerne hvorpaa de staae, ogsaa ligestore.

Beviis: Lad (Fig. 16 og 17.) Vinklerne $\angle CDE$ og $\angle GCB$ være ligestore, og lad Vinkelspidserne C være lagte paa hinanden, da vil (§. 6.) Linien CD falde paa CG og CE paa CB og da Linierne ere ligestore (§. 9.) Punkterne D og E paa G og B og følgelig Buen DE paa Buen GB .

Till. 1. Trækkes i en Cirkel en Diameter AB (Fig. 17.) og en anden Diameter DE lodret paa den første, da blive Vinklerne ved Centrum rette og følgelig lige store (§. 7. Till.) Peripherien af Cirklen deles da efter den anførte Læresætning i fire ligestore Buer eller Quadranter hver til 90° (§. 9. Anm. 2.).

Till. 2. At maale en Vinkel er egentlig at bestemme Linierne's Bøjning mod hinanden, dette skeer ved at sammenligne den med den rette Vinkel, da ved at tilkiendegive hvor stor en Part den er af en ret Vinkel, Linierne's Afbvigelse tillige bestemmes. Saaledes f. Ex er Vinkelen FCB (Fig. 17.) $= \frac{1}{3} R$ ∴ Linierne's Afbøjning er saaledes, at Afbøjningen af de Linier der gjøre en ret Vinkel er tre Gange saa stor. For bequemmere at kunde anfille denne Sammenligning antager man almindelig

delig $\frac{1}{3}$ af en ret Vinkel til Maalestok og bestemmer enhver anden Vinkels Størrelse ved at see hvor ofte den antagne $\frac{1}{3} R$ indeholdes deri; og da man ved at anføre Vinklerne som Centervinkler og sammenligne Buerne de staa paa, finder at der er samme Forhold imellem Buerne som imellem Vinklerne; saa udmaales almindelig i Stedet for Vinklen Buen imellem Vinklens Been, da man ved at sammenligne den maalte Bue med 90° som er den Bue en ret Vinkel staaer paa (Eill. 1.) finder, hvor stor en Part den givne Vinkel er af en ret s. Ex. naar Buen FB (Fig. 17.) er 30° saa er Vinklen $FCB = \frac{1}{3} R$. da 30° er $= \frac{1}{3} \times 90^\circ$.

Anm. Til mekanisk Udmaalning af Vinkler betienger man sig af en Transporteur, som er en halv Cirkel inddeelt i sine 180 Grader.

§. 11.

Forkl. Cirkler beskrevne fra samme Center med forskellige Radier kaldes concentriske. (Fig. 16. 17.); men beskrevne fra forskellige Centrere ere de excentriske. (Fig. 18. 19.)

Cirkler siges at staae hinanden naar en Deel af den eenes Peripherie ligger i Pladen af den anden. En ret Linie staaer en Cirkel naar nogle Dele

Dele af Linien ligge uden og nogle inden for Cirkellinien.

Bæresæt. Excentriske Cirkler røre hinanden naar Middelpunkternes Afstand er mindre end Radiernes Summa, men større end deres Differens.

Beviis: Middelpunkternes Afstand er (Fig. 19.) AC , Radiernes Summa $CD + AB$.

Altsaa er $CD + AB > AC$

$$CD = CD \quad (\S. 9.)$$

$$AB > AC - CD$$

$$AB > AD. \text{ følgelig}$$

Punktet D 's Afstand fra Centrum A mindre end Radius AB og Punktet D i Gladen af Cirklen hvis Radius er AB (§. 9.).

Vill. Er Middelpunkternes Afstand (Fig. 18.) $AC =$ Radiernes Summa $CD + DA$ eller deres Difference da vil Cirklerne røre hinanden.

Om Triangler, især om deres Egestorhed.

§. 12.

Plane Figurer ere ligestore naar de dække hinanden, eller passe paa hinanden (§. 5.). At to Triangler følgelig ogsaa ere ligestore, naar alle tre

tre Sider og Vinkler ere stykkevis ligestore er af sig selv klart; thi de vil da nødvendig dække hinanden. Men til at indsee at Ligestorheden af to Triangler ogsaa kan findes uden at vide om alle tre Sider og Vinkler ere ligestore, tiene de nu følgende Sætninger.

Læresæt. Naar i Trianglerne ACB og DFE (Fig. 20. 21.) Vinklen A er $\equiv D$, Siden $AC \equiv DF$ og $AB \equiv DE$ da vil Trianglerne dække hinanden og være ligestore.
 2: To Triangler ere congruente naar to Sider og den indsluttede Vinkel i den ene ere ligesaa store som i den anden.

Bevís: Naar Trianglen DFE antages at være lagt paa ABC maa, da Vinklen A er $\equiv D$, Linien DF falde paa AC og Linien DE paa AB og da AB er antaget $\equiv DE$ og $AC \equiv DF$ maa Punktet F falde paa C og E paa B og Linien CB maa da (§. 3. Till.) nødvendig falde sammen med Linien FE .

Till. To Sider og den deraf indsluttede Vinkel bestemme altsaa fuldkommen en Triangel, og af disse Stykker lade sig kun tegne een Triangel, men vel i forskjellig Beliggenhed.

§. 13.

Læresæt. Naar i en ligebenet Triangel ABC (Fig. 27.) en Linie BD antages at dele Vinklen B som indskurtes af de to lige lange Been i to lige Dele; da deler den hele Triangel i to ligestore Triangler, og staar tillige lodret paa Linien AC .

Beviis: Efter Betingelsen er Linien $AB = BC$, Vinklen $ABD = DBC$ og $BD = BD$ følgelig (§. 12.) Trianglen $ADB = BCD$ og Vinklen $ADB = BDC = R$ (§. 7.) altsaa Linien BD lodret paa AC ; og $AD = DC$

Føll. 1. Vinklerne ved Grundlinien i en ligebenet Triangel s: de Vinkler der staa lige over for de to lige store Sider, ere ligestore.

Føll. 2. Naar Linien BD (Fig. 27.) staar midt paa Grundlinien og lodret maa den dele Vinklen ved B i to lige Dele. Thi der maatte ellers gives en anden ret Linie som deelte Vinklen B i 2 lige Dele og som i Følge Læresætningen skulde ogsaa staa midt paa Grundlinien, men dette er umuligt (§. 7.).

§. 14.

Læresæt. To Triangler ere congruente naar alle tre Sider ere Stykkeviis ligestore i dem begge.

Bev.

Bev. 1. Tilfælde: Trianglerne være GKI og GHI (Fig. 24.) Siden $GI = GI$; $GK = GH$ og $KI = IH$; lad en Linie trækkes fra K til H ; saa er Triangelen KIH ligebenet og Vinklen $HKI = KHI$ (§. 13. Till. 1.) ligesaa i Triangelen KGH er Vinklen $HKG = KHG$ og $HKI + HKG = KHI + KHG$ ∴ Vinklen $GKI = GHI$ og følgelig Triangelen $GKI = GIH$ (§. 12.).

2. Tilfælde: Trianglerne være ACB og ADB (Fig. 25.) Siden $AB = AB$; $AC = AD$ og $BC = BD$ saa er Triangelen ACD ligebenet; Vinklen $C = D$ og Triangelen $ACB = ADB$ (§. 12.).

3. Tilfælde: Trianglerne være ACB og ABD ; (Fig. 26.) Siden $AB = AB$; $AC = AD$ og $BC = BD$. Lad en Hielpelinie trækkes fra C til D ; saa er Triangelen CAD ligebenet og Vinklen $ACD = ADC$. Triangelen CBD er ogsaa ligebenet og deri Vinklen $BCD = BDC$ altsaa (§. 13. Till. 1.) $ACD - BCD = ADC - BDC$ ∴ Vinklen $ACB = ADB$ og Triangelen $ACB = ADB$ (§. 12.)

Till. Tre Sider bestemme altsaa en Triangel, og af tre givne Linier lade sig fun- tegge een Triangel, men i forskiellig Beliggenhed.

§. 15.

Lærsf. Triangler ere ligestore, naar een Side og to Vinkler ere ligestore i dem begge.

Beviis: Naar i Trianglerne ACB og DEF (Fig. 21 og 23.) antages Siden $AB = DE$, Vinklen $A = D$ og $B = E$ saa maa naar Triangelen ACB lægges paa DEF saa at Vinkelspidsen A falder paa D , Linien AB falde paa DE og AC paa DF ; fremdeles da AB efter Betingelsen er $= DE$, Punktet B paa F og Linien BC paa FE . Nu er Spørgsmaalet om Punktet C falder sammen med E ; og det indsees ved en indirect Demonstration (Prol. §. 10.) thi antages C at falde enten oven eller neden for E maa Vinklen B blive større eller mindre end F som er mod Betingelsen.

§. 16

Lærsf. To Naboe Vinkler udgiøre altid tilsammentagne to rette Vinkler.

Bev. Vinklerne være ACD og DCB (Fig. 4.) lad Linien CE antages lagt saa at Vinklen ACE bliver $= ECB = R$ (§. 7.) saa er $ACE + ECB = 2R$; nu er $ACE + ECB = ACD$ og følgelig $ACD + DCB = 2R$.

Ell.

Till. Tre eller flere Nabovinkler udgiøre sammenlagte to rette og alle de Vinkler, der faa ligge om et Punkt fire rette Vinkler.

Modsat. Naar to Vinkler ACD og DCB (Fig. 1) der have en fælles Spidse og en fælles Side udgiøre tilsammentagne to rette, ere de Nabovinkler.

Bevis: Var CB ikke den forlængede til AC saa maatte AC forlænges fra C falde enten oven for CB som CK og da vilde $ACD + DCK$ være $= 2R$ som er imod Betingelsens eller neden for som CI , da altsaa $ACD + DCI$ blev $= 2R$ der ligesledes er efter Betingelsen umuligt; CB er altsaa den forlængede AC og følgelig ere Vinklerne ACD og DCB Nabovinkler.

§. 17.

Bæres. Top Vinkler ACD og ECB (Fig. 8.) (anguli verticales) s: de med Toppunktet mod hinanden vendte Vinkler, der opkomme naar to rette Linier skære hinanden; ere altid ligestore.

$$\text{Des. Vinklerne } DCA + ACE \text{ ere } = 2R \text{ (§. 16)} \\ ACE + ECB = 2R$$

$$\text{altsaa } DCA + ACE = ACE + ECB \text{ (Arith. §. 38. 6)} \\ \text{fradrag } ACE = ACE$$

$$\text{følgelig } DCA = ECB \text{ (Arith. §. 38. 4).}$$

Modsat. Er Vinklen $ACD = ECB$ (Fig. 11.) saa er Linien ED en ret Linie og Vinklerne ACD og ECD Topvinkler.

Bevis: Var ED ikke en ret Linie, maatte Linien EC kunne forlænges fra C og vilde da falde paa en af Siderne af CD og være enten CK eller CI ; da faaledes enten Vinklen ACK eller ACI hvoraf den første er større den sidste mindre end ACD maatte blive $= ECB$ imod den anførte Betingelse.

§. 18.

Læresæt. Naar i en Triangel ADB (Fig. 30.) den ene Side AB , forlænges mod C , skal den udvendige Vinkel DBC være større end den indvendige D , der ligger over for den forlængede Side.

Bevis: Fra Vinkelspidsen A til Midten af DB trækkes en ret Linie AE , der forlænges, saa at EF bliver $= AE$ og fra F til B drages Linien BF . Nu er $EB = ED$ og $EF = EA$ (ved Tegning) Vinklen $DEA = FEB$ (§. 17.) følgelig Trianglen $AED = EBF$ og Vinklen $EBF = ADB$. Men nu er Vinklen $DBC > EBF$ (Arith. §. 38) altsaa $> ADB$.

Følg. 1. Forlænges DB mod H bevises paa samme Maade, at Vinklen ABH er større end DAB og da Vinklen ABH er $= DBC$

(§. 17.)

(§. 17.) saa følger at enhver udvendig Vinkel paa en forlænget Side i en Triangel er større end enhver af de to indvendige modsatte.

Lill. 2. Vinklen DBC er større end enhver af Vinklerne BDA og DAB men $DBC + DBA = 2R$ altsaa $DBA + DAB < 2R$ og ligeledes $DBA + ADB < 2R$: I enhver Triangel ere ethvert Par Vinkler tilfammentagne mindre end to Rette.

Lill. 3. I en Triangel kan ikke være mere end een ret eller stump Vinkel; og derfor kaldes en Triangel retvinklet, naar den har een ret Vinkel og to spidse som ABC (Fig. 32.); stumpvinklet, naar den har een stump og to spidse Vinkler som DEC (Fig. 33.) og spidsvinklet, naar alle tre Vinkler ere spidse.

Lill. 4. Fra et Punkt N (Fig. 28.) lader sig ikke trække flere end een lodret Linie MN paa en given ret Linie som LO . Thi er NM lodret ere Vinklerne NMO og NML rette (§. 7.) antages nu nogen anden Linie fra N at være ligeledes lodret f. Ex. NO eller NL saa skulde Vinklerne NLM eller NOM ogsaa være rette som er umuligt efter Lill. 3.

§. 19.

Opgave: At dele en given Vinkel i to lige Dele.

Oplos. Vinklen være ABC (Fig. 37.) med en vilkaarlig Radius AB beskrives fra Vinkelspidsen A Bue BC . Over Chorden til denne Bue beskrives en ligebenet Triangel, hvis Topunkt bestemmes ved Stigeringspunktet af to med samme Radier (der dog maa tilsammentagne være større end BC (§. 11.)) fra B og C beskrevne Cirkelbuer. En ret Linie fra Vinkelspidsen A til det saaledes bestemte Punkt D vil da dele den givne Vinkel.

Beviis: Efter Constructionen er $AB = AC$, $BD = CD$ og $AD = AD$ altsaa (§. 14) Trianglen $ABD = ACD$ og Vinklen $BAD = DAC$.

Anm. Ved igjen at halvere enhver af de fundne Dele kan en Vinkel deles i fire, otte, sexten o. s. v. lige store Dele. Men at dele en Vinkel i tre lige Dele er en Opgave som i den lavere eller elementære Geometrie ikke almindeligt kan opløses.

§. 20.

Opgave: At dele en given Linie i to lige Dele; saa at Delingslinien bliver lodret.

Oplos. Linien være AB (Fig. 38.) over den beskrives til begge Sider de ligebenede Triangler (§. 19.)

(§. 19.) ADB og AEB , igiennem deres Top-
punkter trækkes Linien DE , som staaer lodret
paa midten af AB .

Beviis: Efter Konstruktionen er $AD = DB$; $AE = EB$; og $ED = ED$; føl-
gelig Trianglen $EAD = EBD$ (§. 14.) og
Vinklen $ADC = CDB$ og altsaa Linien CD
lodret paa Midten af AB (§. 13.).

§. 21.

Opgave. Fra et givet Punkt M i en ret
Linie (Fig. 28.) at oprejse en lodret Linie.

Oplos. Fra det givne Punkt M affættes
paa Linien ligestore Stykker nemlig $ML = MO$; over Linten LO beskrives en ligebenet Trian-
gel; da en Linie fra dens Toppunkt N til det giv-
ne Punkt M vil være den forlangte lodrette Linie.

Beviis: Efter Konstruktionen er Linien
 $ML = MO$; $LN = NO$; $NM = NM$
altsaa Trianglen $LMN = MNO$ og Vinklen
 $LMN = NMO = R$ (§. 7.) og folgelig Li-
nen NM lodret paa LO .

Ex. Fra et givet Punkt C uden for en
given Linie AB (Fig. 39.) fødes en lodret Li-
nie CD paa den givne Linie saaledes: Fra Punk-
tet C beskrives med en vilkaarlig Radius AC en
Cirkelbue, som staaer den givne Linie i A og B
over

over AB beskrives til den anden Side en ligeber-
net Triangel som (§. 20.) og fra dens Vinkelspids
til det givne Punkt trækkes Linien CE som er den
forlangte lodrette. Bevist er det samme som
§. 20.

§. 22.

Læresæt. Naar i en Triangel den ene
Side er større end den anden; saa er altid den
Vinkel lige over for den større Side, større
end den over for den mindre.

§. Ex. i Trianglen ACB (Fig. 31.) være
 $AB > CB$ saa er Vinklen $C > A$.

Beviis: Paa AB affættes $DB = CB$,
og Punkterne C og D sammenbindes, i Triange-
len DCB er Vinklen $BCD = CDB$ (§. 13.
Till. 1.). Men i Trianglen ADC er DB en
forlænget Side og altsaa Vinklen $CDB > A$
nu er $CDB = BCD$ derfor $BCD > A$,
og $BCA > BCD$ altsaa $BCA > A$.

Modsat. Naar Vinklen C er større end
 A , maa Siden AB være større end CB .

Bev. Var $AB = CB$, saa var Vinklen
 $C = A$ mod Betingelsen; var $AB < CB$
saa var efter Sætningen Vinklen $A > C$ som li-
geledes er mod den anførte Betingelse. Kan saa-
ledes

Iedes AB hverken være $= CB$ eller $< CB$ saa maa den nødvendig være større.

Till. 1. I en retvinklet Triangel staaer derfor altid den største Side lige over for den rette Vinkel som BC (Fig. 32.) og kaldes Hypothenuse, de to andre Sider kaldes Catheter.

Till. 2. Den lodrette Linie er den korteste af alle de rette Linier, der kan trækkes fra et Punkt ned paa en ret Linie, da enhver anden ret Linie vil blive Hypothenuse i en retvinklet Triangel.

Till. 3. I en ligebenet Triangel ABC (Fig. 34.) er enhver ret Linie fra Punktet B ned paa Grundlinien, som falder inden for Benene AB og BC kortere end disse lige lange Been; derimod er enhver Linie som fra samme Punkt paa Grundlinien falder uden for Benene længere end disse.

§. 23.

Læresæt. To Triangler ere ligestore naar der er een Vinkel, en hosliggende og en modstaaende Side ligestore i dem begge, og den modstaaende Side tillige er større end den hosliggende.

Bes. Trianglerne være ABC og DEF (Fig. 35-36.) Vinklen $B = E$; Siden $AB = DE$,

DE , $AC \equiv DF$ og $AC > AB$; lægges nu Vinklen E paa B , vil Siden ED falde paa AB , og da $BA \equiv DE$, Punktet D paa A ; ligeledes vil EF falde paa BC ; men nu er Spørgsmaalet om Punktet F vil falde paa C , dette indsees ved at vise Umuligheden af det modsatte; thi faldt F oven for C f. Ex. i D og en Linie blev trukket fra A til D maatte Triangelen ADC være ligebenet da AD blev saaledes $\equiv DF \equiv AC$ (per hypoth.) og altsaa (§. 22. Tilf. 3.) $AB > AC$ som er imod Betingelsen. Faldt F neden for C f. Ex. i E blev Triangelen ACE ligebenet, da AE blev $\equiv DF \equiv AC$ (per hypoth.) og folgelig skulde AB være $> AC$ som er imod Betingelsen. Kan nu Punktet F hverken falde oven eller neden for C maa det falde sammen med C og altsaa Linien $EF \equiv BC$. og Trianglerne congruente.

Om parallelle Linier og de deraf dannede
Figurer.

§. 24.

Forkl. Ligeledende eller parallelle Linier ere rette Linier i en Plan, som ihvorkanget de end forlænges aldrig kan løbe sammen f. Ex. AB , DE (Fig. 6.). Sammenløbende (convergerende)

de) falder rette Linier som tilstrækkelig forlængede
 flere hinanden i et Punkt og gjøre en Vinkel som
 AB, DE (Fig. 7.).

§. 25.

Læresæt. To rette Linier AB og CD
 (Fig. 40.) ere parallelle; naar ved at overskies-
 res med en tredie EF , enten 1) De to indvend-
 lige Vinkler $o + p$ tilfammentagne ere $\equiv 2$
 R , eller 2) den udvendige og indvendige mods-
 satte Vinkel m og p ere ligestore eller 3) Vexels-
 vinklerne n og p (anguli alterni) ere ligestore.

Bevis: Naar Linierne AB og CD løb
 sammen med B og D blev der en Triangel hvor
 de to indvendige Vinkler $p + o$ var $\equiv 2 R$ og
 hvor den udvendige Vinkel m var \equiv den indvendige
 modsatte p . hvilke begge Tilfælde er umulige
 (§. 18. Till. 1 og 2.) Ligesaalidet kan de løbe sammen
 mod den anden Ende thi naar $o + p$ er $\equiv 2$
 R , saa er og de to indvendige paa den anden Si-
 de $\equiv 2 R$ (§. 16.) og folgelig vil samme Umu-
 lighed i at tænke en Triangel der finde Sted. Ere
 Vexelsvinklerne p og n ligestore, saa ere og de to
 indvendige $p + o \equiv 2 R$. Thi efter §. 16. ere
 $n + o \equiv 2 R$ og naar n er $\equiv p$ ere ogsaa $p + o$
 $\equiv 2 R$ altsaa vil den samme Umulighed af at
 Linierne kunde løbe sammen igjen finde Sted.

Anm. De tre anførte Tilfælde med Vinklerne som bestemme Linierne's parallelle Veltiggenhed ere saaledes forbundne, at et af dem antaget har de andre til Følge, f. Ex. ere de indvendige $\equiv 2R$ saa er ogsaa den udvendige og indvendige modsatte, samt Vekselvinklerne ligestore; thi

$$\begin{array}{rcl}
 1) & o + p & \equiv 2R \text{ (efter Betingelsen)} \\
 & o + m & \equiv 2R \text{ (§. 16.)} \\
 \hline
 & o + p & \equiv o + m \\
 & o & \equiv o \\
 \hline
 & p & \equiv m
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 2) & o + p & \equiv 2R \\
 & o + n & \equiv 2R \text{ (§. 16.)} \\
 \hline
 & o + p & \equiv o + n \\
 & o & \equiv o \\
 \hline
 & p & \equiv n.
 \end{array}$$

§. 26.

Opgave: Igennem et givet Punkt at trække en Linie parallel med en given Linie CD .

Opløs. Igennem det givne Punkt og et vilkaarligt Punkt i den givne Linie trækkes en Linie FE ; (Fig. 41.) og Vinkelen m sættes $\equiv n$; naar da Linien AB trækkes er den parallel med CD (§. 25.).

Anm.

Anm. *Mekanisk* (d. e. ved at bruge andre Instru-
 . menter end Linial og Passer) kan en Linie trækkes
 igiennem et givet Punkt parallel med en anden saa-
 ledes: man lægger en Linial AB (Fig. 42.) igien-
 nem det givne Punkt og et Punkt i den givne Linie,
 og ved den lægges en Triangel saaledes at dens ene
 Side falder langs med Linien HI og den anden tæt
 og til Linialen; derpaa føres Trianglen langs med
 Linialen i samme Beliggenhed til det givne Punkt;
 da Linien EG derefter optrækkes som er parallel med
 HI (§. 25.). Ved Parallellinialen trækkes ogsaa en
 Linie parallel med en anden.

§. 27.

Grundsæt. Naar to rette Linier AB og
 DE (Fig. 43.) skæres af en tredie GH saales-
 des at de to indvendige Vinkler BIK og EKI
 ere tilsammentagne $< 2R$ maa Linierne løbe
 sammen.

Anmerk. Denne er den saa meget omtvistede 1ste
 Grundsætning hos Euclid. Man har vildet nægte
 dens Antagelse for Grundsætning og forsøgt paa
 mange forskellige Maader at bevise den; et Beviis
 findes derfor hos Carstens; men som grundet paa en
 foregaaende Sætning hvorved alle tre Vinkler i en
 Triangel bevises at være lig $2R$, der forekommer
 mig ikke tilfredstillende. Ligesaaalidet synes det for
 samme af Johan Schulz i Königsberg fremsatte Be-
 viis passende her at anføre; hellere har jeg derfor
 vildet anføre den som Grundsætning.

Zilt. Linierne AB og DE ere ogsaa convergerende naar enten den udvendige og indvendige modsatte Vinkel eller Vexelvinklerne ere uligestore; thi er f. Ex. Vinklen $GIB >$ Vinklen IKE saa ere, da $GIB + BIK = 2R$ (§. 16.) ogsaa $BIK + IKE < 2R$ og altsaa Linierne convergerende (§. 27.). Ligeledes naar $AIK > IKE$ saa er, da $AIK = GIB$ (§. 17.) ogsaa $GIB > IKG$ og folgelig Linierne convergerende.

§. 28.

Læresæt. Overstaares to parallelle Linier AB og CD (Fig. 40.) med en tredie EF da
 1) begge de indvendige Vinkler paa samme Side af den skærende Linie $o + p = 2R$.
 2) Den udvendige Vinkel $m =$ den indvendige modsatte p . 3) Vexelvinklerne n og p ligestore.

Bevijs: 1) Vare Vinklerne $o + p < 2R$ vilde Linierne løbe sammen med B og D (§. 27.) som er mod Betingelsen da de antages parallelle; vare derimod $o + p > 2R$ maatte Linierne løbe sammen mod den anden Ende som ligeledes er mod Betingelsen; kan saaledes $o + p$ hverken være $< 2R$ eller $> 2R$ saa følger at de maa være $= 2R$.

2) Ere $o + p = 2 R$ saa da $o + m$ ere $= 2 R$ (§. 16.) saa følger at $o + p = o + m$ og følgelig $p = m$.

3) Er $p = m$ og $m = n$ (§. 17.) saa er altsaa $p = n$.

III. 1. Ere to rette Linier parallelle med en tredje ere de ogsaa indbyrdes parallelle. En ret Linie som skærer den ene af to parallelle Linier skærer naar den forlænges ogsaa den anden.

III. 2. Ligge to Vinkler DEF og GHI (Fig. 111.) saaledes i en Plan at Linien ED er parallel med GH og EF med HI saa ere Vinklerne ligestore; thi er ED parallel med HG saa er Vinklen $E = n$ (§. 18.) og da HI er parallel med EF er $n = m$ følgelig $E = m$.

§. 29.

Læresæt. Naar i en Triangel ACB (Fig. 48.) den ene Side AB forlænges mod D , da er den udvendige Vinkel paa den forlængede Side saa stor som de to indvendige modsatte: $CBD = BCA + CAB$.

Beviis: Igennem Punktet B trækkes Linien BH parallel med AC (§. 26.) saa er

$$\angle HBD = \angle CAB$$

$$\text{og } \angle CBH = \angle BCA \quad (\S. 28.)$$

$$\text{altsaa } \angle HBD + \angle CBH = \angle CAB + \angle BCA$$

$$\text{og } HBD + CBH = CBD = CAB + BCA.$$

Ell. 1. Alle tre Vinkler i enhver Triangel udgiøre tilsammentagne to rette Vinkler eller 180° thi $\angle CBD + CBA = 2 R$ (§. 16.) men $CBD = CAB + BCA$ altsaa $CBA + CAB + BCA = 2 R$.

Ell. 2. Naar i en Triangel een Vinkel er bekiendt, er Summen af de to andre ogsaa bekiendt og ere de to Vinkler givne, er den tredie ligeledes. Naar altsaa i to forskjellige Triangler de to Vinkler ere stykkevis ligestore, er den tredie ogsaa.

Ell. 3. Er i en ligebenet Triangel een Vinkel bekiendt, ere de alle tre bekiendte. I en ligesidet Triangel er hver Vinkel $= \frac{2}{3} R = 60^\circ$.

Ell. 4. I en retvinklet Triangel udgiøre de 2 spidse Vinkler tilsammentagne een ret, og naar Catheterne ere ligestore ere hver af de spidse Vinkler $= \frac{1}{2} R = 45^\circ$.

Ell. 5. Summen af alle Vinklerne i enhver retlinet Figur findes ved at multiplicere Sidernes Antal med $2 R$ og derafra subtrahere $4 R$ s: $S = (n \times 2 R) - 4 R$. Thi fra et Punkt i Figurens Glade kan trækkes Linier til alle dens Vinkelspidser (Fig. 32.) hvorved der opkomme ligesaa

ligesaa mange Triangler som Figuren har Sider; i hver Triangel udgiøre Vinklerne $2R$, altsaa findes Summen af Trianglernes Vinkler ved at multiplicere deres Antal med $2R$; men Vinklerne som ligge omkring det antagne Punkt udgiøre $4R$ (§. 16.) disse maa altsaa, da de ikke høre til den egentlige Figurs Vinkler, subtraheres fra Summen af Trianglernes Vinkler.

Anm. Vinkler kan være enten udgaaende eller indgaaende. For saavidt Venene forlængede mod den anden Side af Toppunktet enten gaa ud fra Figuren eller ind i Figurens Flade.

§. 30.

Læresæt. Overføres to parallelle Linier AB, DC (Fig. 44.) med to andre parallelle Linier AD og BC , da ere de imellem Parallelerne liggende Stykker ligestore: nemlig $AB = DC$, og $AD = BC$.

Beviis: Naar Linien DB (som kaldes en Diagonallinie) trækkes, opkomme Trianglerne ADB og DBC hvor i er

$$DB = DB$$

$$\begin{aligned} \angle ADB &= \angle CBD \\ \angle ABD &= \angle CDB \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{l} \text{§. 28.)} \end{array} \right]$$

altsaa $\triangle ABD = \triangle DBC$ og følgelig $AB = DC$; og $AD = BC$.

Till. 1. En saadan firsideg Figur, hvort de modstaaende Sider ere parallelle og ligestore kaldes et Parallelogram.

Anm. Et Parallelogram nævnes almindelig ved de to Bogstaver som staa ved de modstaaende Vinkelspidser f. Ex. AD ; FH (Fig. 45 og 46.)

Till. 2. Quadraten, Rectanglet, Rhombus og Rhomboides (§. 8.) ere Parallelogramer.

Till. 3. Ethvert Parallelogram deles ved en Diagonallinie i to ligestore Triangler, og ikke allene dets modstaaende Sider; men ogsaa de modstaaende Vinkler ere ligestore, og Summen af alle dets fire Vinkler udgør tilfammentagne $4 R$ (sammenlign §. 29. Till. 5.).

Till. 4. Parallelle Linier staae allevegne ligelangt fra hinanden; thi alle perpendicularerne imellem dem blive parallelle (§. 25.) og ere altsaa ligestore (§. 30.).

Anm. Man kan paa Grund heraf geometrisk tegne en Linie parallel med en anden, ved at trække den giennem Endepunkterne af to paa den givne Linie opreiste ligestore Perpendicularer.

Till. 5. Er i et Parallelogram een Vinkel $\equiv R$ ere de alle rette; er derimod een spids er den modstaaende ogsaa spids men de to andre stumppe, og omvendt.

§. 31.

Opgav. Af to givne Linier DC , CB (Fig. 44.) og den Vinkel de indslutte BCD at tegne et Parallelogram.

Oplos. Den ved de tre givne Stykker bestemte Triangel DCB affættes og nu gøres $\triangle ADB \equiv DCB$ saa er $\angle ABD = BDC$ og $ADB = DBC$ følgelig Linien AB parallel med DC og AD med BC (§. 25.) og den tegnedes Figur et Parallelogram (§. 30. Till. 1.).

Till. Er den givne Vinkel ret, og de to Sider som indeslutte den ligestore, da frembringes en Kvadrat; er Vinklen skæb men Siderne ligestore en Rhombus; er Vinklen ret, men Siderne ulige en Rectangel og er Vinklen skæb og Siderne ulige en Rhomboides.

Anm. Til at tegne en Kvadrat behøves altsaa kun at gives en Side; til en Rhombus een Side og een Vinkel; en Rectangel 2 Sider, og en Rhomboides, to Sider og en Vinkel.

§. 32.

Løres. Naar i et Parallelogram $ABCD$ (Fig. 53.) trækkes en Diagonal AC og igiennem et vilkaarligt Punkt E paa Diagonalen trækkes Linier parallelle med de modstaaende Sider nemlig EK parallel med AB og DC ; og EG

parallel med AD og BC ; da blive de to Parallelogramer som Diagonalen ikke gaaer igjennem ED og EB (som kaldes Complementer til Parallelogramerne omkring Diagonalen) ligestore.

Beviis:

$$\triangle ADE = \triangle ABC \text{ (§. 30. Till. 3)}$$

$$\triangle AIE = \triangle AEH$$

$$\triangle EGC = \triangle EKC$$

altsaa $\triangle ADC - (AIE + EGC) = \triangle ABC - (AEH + EKC) \therefore \text{Parall. } ED = \text{Parall. } EB.$

Till. Er Parallelogramet en Kvadrat $ABCD$ (Fig. 54.) hvis ene Side bestaaer af to Dele AF og FB , da bestaaer Kvadratet paa hele Linien AB , af følgende Stykker 1) Kvadratet paa AF ; 2) Kvadratet paa FB eller EC og 3) 2 ligestore Rectangler FE og HF . Da nu en Side i en Kvadrat kan altid ansees som Roden, og Gladen eller Kvadratet selv som Kvadrattallet af denne Rod; saa kan heraf udledes et Beviis for den i Arithmetiken §. 55. anførte Sætning om Kvadrattallet af en binomisk Rod.

§. 33.

Forkl. Ved Høiden i et Parallelogram forstaaes den perpendicularære Linie imellem to modstaaende

staaende Sider hvoraf den ene da kaldes Grundlinien. I en Triangel er Høiden en Perpendikular fra en af Vinkelspidserne ned paa den modstaaende Side, som da kaldes Grundlinie.

Till. 1. I Rectanglerne ere af to anliggende Sider altid den ene Høide og den anden Grundlinie; i Kvadratet er Grundlinie og Høide ligestore og altid en af Kvadratets Sider. I Rhomber og Rhomboider er derimod naar af to anliggende Sider den ene antages for Grundlinie, Høiden altid mindre end den anden (§. 22. Till. 1.)

Till. 2. En Triangel er halvdelen af et Parallelogram, som har samme Grundlinie og Høide (§. 30. Till. 3.).

§. 34.

Læresæt. Parallelogramet, som have samme Grundlinie og Høide, ere ligestore.

Beviis: 1te Tilfælde. Parallelogramerne være BF og AE (Fig. 56.) saa er $AB = CF$; $AD = FE$ (§. 30. Till. 1.) $BC = AF = DE$ og $BC + CD = DE + CD$ $\therefore BD = CE$ altsaa Trianglen $ABD = CFE$ og $ABD - CDH = CFE - CDH$ \therefore Trapez. $BACH =$ Trapez. $DHFE$ folgelig $BACH + AHE = DHFE + AHE$ \therefore Parallelog. $BF =$ Parallelog. AE .

2det Tilfælde: Parallelogrammerne være BF og AE (Fig. 55.) saa er $AB = DF$; $AC = FE$; $BD = AF = CE$; altsaa $BD - CD = CE - CD$ $\therefore BC = DE$ og Trianglen $ABC =$ Trianglen DFE følgende $ABC + ACDF = DFE + ACDF$ $\therefore FB = AE$.

3de Tilfælde: Parallelogrammerne være BC og AE (Tab. 2. Fig. 1.) saa er $AC = BD$; $AD = BE$; $CD = AB = DE$ altsaa Trianglen $ACD = DBE$ og $ACD + ADB = DBE + ADB$ \therefore Parallelog. $CB = AE$.

§. 35.

Læresæt. Triangler som have samme Grundlinie og Høide ere ligestore.

Bevist: Trianglerne være ACB og ADB , (Fig. 3.) naar da CF trækkes parallel med AB , FE med AC og BF med AD ; saa er $ACB = \frac{1}{2}$ Parall. $ACEB$ og $ADB = \frac{1}{2}$ Parall. $ADFB$; men Parall. $ACEB =$ Parall. $ADFB$ (§. 34.) altsaa $\frac{1}{2} ACEB = \frac{1}{2} ADFB$ og $\triangle ACB = \triangle ADB$.

§. 36.

Opgav. 1) At forvandle en Triangel ABC (Fig. 2.) til et Parallelogram.

Oplos. Fra Midten af Grundlinien AB trækkes en Linie FE parallel med AC og igiennem C en Linie CD parallel med AB saa er Parall. $AE = \frac{1}{2}$ Parall. $ACDB = \Delta ACB$.

2) At forvandle en ΔKIF (Fig. 4.) til et Parallelogram hvori der er en given Side G og en given Vinkel.

Oplosning: Paa Midten af Grundlinien AF assættes den givne Vinkel ved H og Parall. $HLEF$ frembringes paa den nylig forklarede Maade. Fra F assættes nu Linien $FC =$ den givne Linie G , IE forlænges og igiennem C trækkes CD parallel med FE ; Linierne LH , EF og DC forlænges derpaa ubestemt; fra D til F trækkes en Diagonal, som forlænges til den skærer den forlængede LH i A ; derpaa trækkes AB parallel med HC . Nu er Parall. $FB = FL$ (§. 32.) og $FL = \Delta KIF$, folgelig $FB = KIF$ men i FB er $FC = G$ (den givne Side) og Vinklen $FGB = HAB$ (§. 28.) $= LHF$ (den givne Vinkel).

Anm. Er den givne Vinkel $= R$. bliver Trianglen forvandlet til en Rectangel.

III. Enhver retlinet Figur forvandles til en Rectangel, naar den inddeles ved Diagonaler i Triangler; og hver Triangel for sig forvandles til en Rectangel med en given Side, da disse Rectangler igien samles til een eneste.

§. 37.

Læresæt. I enhver retvinklet Triangel ACB (Fig. 5.) er Quadraterne paa Hypothenusen AB saa stor som Quadraterne paa begge Catheterne AC og CB tilsammentagne.

Beviis: Paa Triangelns Sider beskrives Quadraterne AF , BG og AH ; fra den rette Vinkels Spidse C fældes en lodret Linie GL paa Hypothenusen igiennem dens Quadrat; som derved deles i to Rectangler BL og LA . Nu bevises at Rectanglen BL er \equiv Quadraten BG . Fra G til E og fra A til F trækkes til den Ende Hielpelinier; saa er Triangelen $ABF \equiv \frac{1}{2}$ Quadr. GB og Triangelen $BCE \equiv \frac{1}{2}$ Rectangel BL (§. 30. Till. 3.).

men $AB \equiv BE$

$$BF \equiv BG$$

$$\frac{\angle ABF \equiv \angle CBE}{\Delta ABF \equiv \Delta CBE} \left[\begin{array}{l} \text{thi } ABF \equiv ABC + R \\ \text{og } CBE \equiv ABC + R \end{array} \right.$$

$\frac{1}{2}$ Quadr. $BG \equiv \frac{1}{2}$ Rect. BL altsaa Quadrateret $BG \equiv$ Rect. BL .

Paa

Paa samme Maade; ved at trække Hielpelinierne DC og IB , bevises at Rectanglen $AL =$ Kvadratet AH .

Nu er Rect. $BL =$ Quadr. BG

Rect. $AL =$ Quadr. AH

altsaa Quadr. BD (Rect. $BL +$ Rect. AL) $=$ Quadr. $BG + AH$.

Anm. Denne Læresætning, som efter dens formeente første Opfinder kaldes den Pythagoriske, er for dens mangfoldige Anvendelse i Mathematiken, af overmaade stor Vigtighed. Pythagoras siges derfor ogsaa af Glæde over denne Opfindelse at have ofret et Hecatombe. Kvadratet paa en Linie BC betegnes ved Exponenten 2 eller ved Bogstavet q , saa at BCq v. BC^2 er $=$ Kvadrat $BCGF$.

Føll. Er Kvadratet paa Hypothenusen saa stort som Quadraterne paa begge Catheterne; saa maa Kvadratet paa den ene Cathete være saa stort som Differencen mellem Kvadratet paa Hypothenusen og Kvadratet paa den anden.

§. 38.

Opgave: 1) At regne en Kvadrat saa stort som to givne, eller at addere to Quadrater.

Oplos. De givne Quadrater-være ABq og GHq (Fig. 7.) man tegner da en retvinklet Triangel AEB hvor $AB = AB$, $AE = GH$
saa

saa er $EBq = ABq + AEq = ABq + GHq$ (§. 37.).

2) At tegne en Kvadrat saa stor som Differencen mellem to givne Kvadrater; eller at subtrahere en mindre Kvadrat fra en større.

Oplos. De givne Kvadrater være ABq og GHq (Fig. 7.) man tegner en retvinklet Triangel FDE (Fig. 9.) saaledes at $DF = GH$; $FE = AB$; saa er $DEq = FEq - FDq = ABq - GHq$ (§. 37. Till.)

3) At tegne en Kvadrat dobbelt saa stor som en given.

Oplos. Kvadraten være ABq man trækker i den en Diagonal CB , saa er $CBq = ACq + ABq = 2 ABq$.

4) Af de to Sider (givne i Tal) i en retvinklet Triangel ACB (Fig. 8.) ved Beregning at finde den tredje.

Oplos. Ere Catheterne givne, da tages Kvadrattallene deraf og adderes, og af Summen udtrækkes Roden som er Hypothenusen; thi $CB^2 = AC^2 + AB^2$ (§. 37.) og altsaa $\sqrt{CB^2} = \sqrt{(AC^2 + AB^2)}$; altsaa $CB = \sqrt{(AC^2 + AB^2)}$. Er Hypothenusen CB og en af Catheterne AB givne, da findes den anden AC naar fra Kvadratet paa Hypothenusen subtraheres Kvadratet paa den ene Cathete og af

Diffe-

Differencen udtrækkes Roden; thi $AC^2 = CB^2 - AB^2$ (§. 37. Till.) og $\sqrt{AC^2} = AC = \sqrt{CB^2 - AB^2}$. f. Ex. $CB = 5$; $AB = 3$; saa er $AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$.

§. 39.

Læres. Er i en Triangel ABC (Fig. 6.) Kvadratet paa den ene Side $CBq = ACq + ABq$ saa er Trianglen retvinklet og Vinklen over for CB er $= R$.

Ben. Ved A assættes Vinkelen $BAD = R$; $AD = AC$ og Punkterne B og D bindes sammen; Triangelen BAD er da retvinklet og $BDq = BAq + ADq$ (§. 37.) men $CBq = BAq + ACq$ (efter Beting.) nu er $BAq = BAq$

$ACq = ADq$ fordi $AC = AD$ (ved Construct.)
altsaa $BAq + ACq = BAq + ADq$
følgelig $DBq = CBq$ og $BD = CB$ er nu
 $AB = AB$; $AD = AC$ og $BD = CB$
saa er Trianglen $BAD = CAB$ og folgelig
 $\angle CAB = BAD = R$.

Om Linier og Vinkler i og ved Cirklen!

§. 40

Læresæt. En Linie som deler Vinklen ved Centrum ACB (Fig. 29. Tab. 1.) i en Cirkel i to lige Dele, deler ogsaa Chorden AB som ligger imellem Vinklens Been i to lige Dele og staaer lodret derpaa.

Beviis: Trianglen ACB er ligebenet, og altsaa naar Linien CD deler Vinklen ACB i lige Dele staaer den tillige lodret midt paa AB (§. 13.).

Fill. 1. Staaer Linien DC lodret paa Midten af Chorden maa den nødvendig gaa igjennem Centrum og dele Vinkel ved Centrum i to lige Dele, thi der maatte ellers gives en anden Linie fra Centro som delte Vinklen ACB i to lige Dele, og som i Følge Læresætningen maatte staa perpendicular paa Midten af Chorden. Der vilde saaledes gives to forskiellige lodrette Linier paa et og samme Punkt i samme rette Linie som er umuligt. (§. 13. og §. 7.)

Fill. 2. Fældes en Linie fra Centrum lodret paa Chorden maa den staa midt paa Chorden thi i Trianglerne ACD og CDB vil $CD = CD$, $\angle CDA = \angle CDB = R$ og $\angle CAD$

$CAD = \angle CBD$ (§. 13. Till. 1.) altsaa $\triangle ADC = DCB$ og $AD = DB$.

§. 41.

Opgav. At søge Centrum til en Cirkel, hvis Peripherie skal gaa igiennem tre givne Punkter.

Oplos. Punkterne være A, B, C , (Fig. 10.) de forbindes med rette Linier AB og BC ; paa Midten af disse opreises lodrette Linier, som da begge maa gaa igiennem Centrum til den søgte Cirkel (§. 40. Till.) og hvor disse Linier skære hinanden, maa altsaa Centrum være. At disse lodrette Linier maa skære hinanden naar Punkterne ligge saaledes (Fig. 10.) at Linierne AB og BC giorre en ret Vinkel med hinanden indsees af §. 28. Till. 1.

Ligge derimod de givne tre Punkter saaledes, at Linierne imellem dem som (Fig. 11.) AB og BC giorre en stump Vinkel med hinanden, da maa de paa Midten af AB og BC opreiste lodrette Linier ogsaa skære hinanden, thi i Triangelen BEF er Vinklen $BFE = R$ (ved Construct.) altsaa BEF spids (§. 18. Till. 1.) folgelig $\angle DGE + GEF < 2R$ og alt saa Linierne CD og ED convergerende (§. 27.).

Større Linierne mellem de tre Punkter en spids Vinkel med hinanden maa de paa Midten af dem opreiste lodrette Linier ogsaa skære hinanden.

Anm. Lige de tre givne Punkter i en ret Linie lader der sig ingen Cirkel slaa derigennem, thi de paa Midten af Forbindingslinierne opreiste Perpendicularer vil da blive parallelle og følgelig ikke skære hinanden (§. 24 og 25.).

§. 42.

Bæresf. Staa i en og samme eller i lige store Cirkler 1) to Chorder lige langt borte fra Centrum, da ere de ligestore; 2) ere Chorderne derimod ligestore, saa staa de lige langt borte fra Centrum; og 3) er den ene Chorde større end den anden, da staaer den større nærmere ved og den mindre længere borte fra Centrum.

Bevijs: 1) Er (Fig. 12.) Chorderne AB og DE lige langt borte fra Centrum O : $CF = CG$, saa er, naar Linierne CB og CD træktes, i Trianglerne CFB og CDG

$$CBq = CFq + FBq$$

$$CDq = CGq + DGq \text{ (§. 37.)}$$

men $CB = CD$ og altsaa $CBq = CDq$

$$\text{følgelig } CFq + FBq = CGq + DGq$$

er

er nu $CFq = CGq$ (efter Beting.)

saa er $FBq = DGq$ og $FB = DG$ (Arith. §. 38.)

$$\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} DE \text{ og } AB = DE.$$

2) Er (Fig. 12.) $AB = DE$ saa er $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} DE$ og $FB = DG$ og $FBq = DGq$ er nu

$$FBq + FCq = CGq + DGq$$

$$\text{og } FBq = DGq \text{ (efter Beting.)}$$

saa er $FCq = CGq$ og $FC = CG$.

3) Er (Fig. 13.) $AB > EG$ saa er $\frac{1}{2} AB > \frac{1}{2} EG$; $DB > EF$.

men $CBq = CDq + DBq$ (§. 37.)

$$CEq = CFq + EFq$$

$$CBq = CEq \text{ altsaa } CDq + DBq = CFq + EFq$$

$$DBq > EFq$$

$$CDq < CFq \text{ (Arith. §. 38.)}$$

og

$$CD < CF.$$

§. 43.

Forkl. En Vinkel som staaer med sit Toppunkt i Cirkelns Peripherie og hvis Sider ere Chorder kaldes en Peripherie-Vinkel som ADB (Fig. 15.) og den siges at staa i Segmentet ADB af Cirklen og paa Buen AB . Center-Vinkel kaldes derimod (§. 10.) en Vinkel, der staaer med sit Toppunkt i Centro og hvis Sider ere Radier ACB (Fig. 25.).

§. 46.

Læresæt. En Linie KI (Fig. 14.) som staar lodret paa Enden af Radius HI . Kan ikke have flere Punkter tilfælles med Cirklen end det, hvori den berører Radius, men ligger ellers aldeles uden for Cirklen.

Bev. Alle de rette Linier HL , HM , &c. som kan trækkes fra Centrum, til Linien KI maa alle blive længere end HI (§. 22. Till. 1.) og altsaa maa de Punkter, hvortil de trækkes alle ligge uden for Cirkelfladen (§. 9.) følgelig ligger hele Linien KI uden for Cirklen.

Till. 1. En saadan Linie som staar lodret paa Enden af en Radius er altsaa en Tangent; og til ethvert givet Punkt i en Cirkel trækkes altsaa en Tangent ved at opreise (§. 45.) en lodret Linie paa Enden af Radius.

Till. 2. Fra et givet Punkt A (Fig. 21.) uden for en Cirkel trækkes en Tangent til Cirklen naar det givne Punkt bindes sammen med Cirkelns Centrum C , Linien CA halveres og fra Middepunktet beskrives en Cirkel som skærer den gamle Cirkel i D ; Linien AD bliver da den forlangte Tangent, thi Vinklen ADC er $\equiv R$ (§. 44. Till. 3.) og altsaa AD en Tangent.

§. 47.

Læres. Stode to Stieringslinier som AB og BC (Fig. 23.) sammen i et Punkt uden for Cirklen, da er Vinklen $ABC = \frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} DE$: den har til Maal det halve af den concave Bue mindre end det halve af den convexe.

Bev. Naar Hjælpelinien AD trækkes, er Vinklen $ADC = ABC + BAD$ (§. 29.)
 $BAD = BAD$

altsaa $ADC - BAD = ABC$ og folgelig
 $\frac{1}{2} AC - \frac{1}{2} DE = ABC$ (§. 44. Till. 1)

Till. 1. En Vinkel som en Tangent og en Sekant gjøre ved at støde sammen uden for Cirklen udmaales paa samme Maade.

Till. 2. Ligger derimod en Vinkel med sit Toppunkt i Glæden af en Cirkel uden at ligge i Centro, da har den til Maal det halve af begge de Buer, som dens Sider, forlængede mod begge Sider af Toppunktet til Peripherien, affikere.

§. 48.

Læresæt. Den Vinkel ABH (Fig. 22) som en Ehorde og en Tangent til samme Cirkel gjøre med hinanden, har til Maal den halve Bue AB som Ehorde affikter.

symmetrie.

\mathcal{R}

Bevist:

Beviis: Fra Væridningspunktet B trækkes en Diameter BCE og Punkterne D, A forbindes ved Linjen DA , i Trianglen DAB er Vinklen $A = R$ (§. 44. Till. 3.)

Vinklerne $ADB + DBA = R$ (§. 29. Till. 4.)

og $DBA + ABH = R$ (§. 46. Till. 1.)

altsaa $ADB + DBA = DBA + ABH$

men $DBA = DBA$

følgelig $ADB = ABH$

det halve af Buen $AB = ABH$ (§. 44 Till. 1.)

§. 49.

Læresæt. Ere i samme eller i lige store Cirkler to Chorder som AB og DE (Fig. IV.) ligestore, da ere Buerne AGB og DEH som de affigere ogsaa ligestore, og omvendt.

Beviis: Chorden AB være $= DE$, Raderne AC, CB, CD og CE trækkes saa er Trianglen $ACB = CDE$ (§. 14.) og altsaa Vinklen $ACB = DCE$ og Buen $AGB =$ Buen DHE .

Till. 1. En lodret Linie CI fra Centro paa Chorden DE , der deler Chorden i to lige Dele (§. 40) deler tillige Buen DAE i to lige store Buer: thi Trianglen DIH er $= EIH$ (§. 14.) altsaa Chorden $DH = HE$ og følgelig

er

efter den nylig anførte Sætning Buen $DH \equiv$
Buen HE .

Fill. 2. En Chorde (AB Fig. 24) som
affskærer en Bue paa 60 Grader er altid saa stor
som Cirkelens Radius, thi er Buen $AB \equiv 60^\circ$
saa er Vinklen $ACB \equiv 60^\circ$ (§. 10. Fill. 2.) og
altsaa Vinkterne $CAB + CBA \equiv 120^\circ$ (§.
29. Fill.) men $AC \equiv CB$ og altsaa $CAH \equiv$
 $CBA \equiv 60^\circ$ (§. 13. Fill. 1.) alle tre Vinklerne
blive altsaa ligestore og folgelig Trianglen ligebenet,
hvordan den end pændes og $AB \equiv AC \equiv CB$.

§. 50.

Pæresæt. Naar til en og samme Cirkel
trækkes to Tangenter BD , AD (Fig. 27.)
der skære hinanden i Punktet D ; saa ere Styk-
kerne fra Berøringspunkterne til Skærings-
punktet ligestore $\therefore BD \equiv AD$.

Bevis: Naar Linierne CD , CB og CA
trækkes, ere

$$BC \equiv CA \text{ (Radier i Cirklen)}$$

$$CD \equiv CD$$

$$\angle DBC \equiv \angle DAC \equiv R \text{ (§. 46. Fill.)}$$

altsaa Trianglen $DBC \equiv$ Trianglen DAC
(§. 23.) og Linien $BD \equiv AD$.

Fill. Vinkterne BCA og BDA samt
Buen BEA deles ved Linien CD i to lige Dele.

Om regulære Figurer i sær Polygoner, og deres Forhold til Cirklen.

§. 51.

Forkl. En Figur siges at være indskreven i en Cirkel naar Cirkelns Peripherie gaaer igiennem alle Figurens Hjørner, og dens Sider ere Chorder og Cirklen kaldes da omskreven som *AFEDB* (Fig. 24.). Ere derimod Figurens Sider Tangenter til Cirklen, kaldes den omskreven og Cirklen indskreven som *GHIKL* (Fig. 28.).

Till. Cirkelns Peripherie er altid større end Peripherien (Perimeteren Omtrækket) af den indskrevne og mindre end Peripherien af den omskrevne Polygon.

§. 52.

Løresæt. Antages Peripherien af en Cirkel at være deelt i et vist Antal af lige store Dele som *AF, FE, ED, DB* og *BA* (Fig. 24.) og der trækkes Chorder mellem alle Delingspunkter fremkommer en indskreven regulær Figur.

Beviis: Være Buerne ligestore, saa ere Chorderne ogsaa ligestore (§. 49.) som ere Figurens Sider, Vinklerne *AFE, FED* &c. blive alle

alle Peripherie-Vinkler des staar i ligestore Segmenter og ere altsaa ligestore (§. 44. Till. 2.), men ere baade Sider og Vinkler ligestore, er Figuren regulær (§. 8.).

Till. I en given Cirkel indskrives altsaa enhver regulær Figur, ved at dele Cirkelens Peripherie i saa mange ligestore Dele som Figuren skal have Sider.

Anm. Den Deling sker enten geometrisk eller mekanisk.

§. 53.

Opgave: At dele en Cirkels Omkreds i fire og i sex ligestore Dele, og tegne en regulær firkant eller sexkant i Cirklen.

Oplos. 1) Man trækker to Diametre AB og CD (Fig. V.) lodrette paa hinanden, saa ere Vinklerne AIC , CIB , BID og DIA rette og altsaa ligestore, og Buerne AC , CB , BD og DA folgelig ogsaa ligestore (§. 10.) naar da Chorderne trækkes, har man den forlangte regulære Firkant.

2) Med Radius AC (Fig. 24.) afsluttes ligestore Stykker paa Peripherien som da inddelles i sex lige Buer (§. 49. Till. 2.) og naar Chorderne hertil trækkes fremkommer den regulære Sexkant.

Till.

Fik. 1. Ved at Halvde Buerne kan man
 naar Cirkelns Peripherie først er delt i fire eller
 for. Dets igjen dele den i 8, 12, 16, 24 og flere
 Dele, og saaledes tegne regulære Polygoner (S.
 37. Fik.). Tilgæddes kan, naar Peripherien er
 delt i et lige Antal ligestore Dele, det halve An-
 tal deraf bestemmes.

Ann. Foruden de her nævnte Dele lader en Cirkels
 Peripherie sig ogsaa dele geometrisk i ti, fem og fem-
 ten lige store Dele, men denne Deling grænder sig
 paa Læresætninger som først i det følgende fremsættes.
 Derimod i 7, 13 &c. Dele lader Peripherien sig ikke
 dele uden stor Beregning og ved mekanisk Tegning.

Fik. 2. Er saaledes en regulær Polygon
 f. Ex. en Sexkant (Fig. 29.) beskrevet i en Cirkel,
 og der trækkes Linier fra Cirkelns Centrum til Po-
 lygonens Vinkelspidser da opkomme saa mange lige
 store Triangler som Polygonen har Sider; disse
 lade sig igjen forvandle til een eeneste Triangel
 (Fig. 33. og S. 35.)

S. 54.

Forkl. Ved Polygon-Vinkel forståes
 den Vinkel i en regulær Polygon som ethvert
 Par af Polygonens Sider gøre med hinanden
 f. Ex. Buerne EAB og EDB (Fig. 24.)
 eller FGH og CDH (Fig. 29.). Polygonens
 Center-Vinkel kaldes den Vinkel, som to
 Radier

Radier i den omskrevne Cirkel, trækne til, begge
Ender af samme Polygon Side, giøre med hin-
anden som AGB , BGD 2c. (Fig. 29.)

Till. 1. Center-Vinklen i enhver i en Cirkel
indskrevet Polygon beregnes derfor, ved at dividere
 360° med Sidernes Antal; (§. 10. Till. 2.)
foldes nu Sidernes Antal n er Center-Vinklen
$$= \frac{360^\circ}{n}$$

Till. 2. Polygonvinklen i enhver i en Cirkel
indskreven Polygon udmaales som en Peripherie-
Vinkel (§. 44. Till. 1.) ved den halve Bue
hvorpaa den staar; og da i enhver regulær Polygon
alle Vinklerne staar paa ligestore Buer, nemlig paa
den halve Cirkels Peripherie indtagne det der ligger
bag ved enhver Vinkels to Sider; som er i en
Hemfandt (Fig. 28.) $\frac{1}{2}$ i en Cirkel (Fig. 24.) $\frac{1}{2}$
af den hele Peripherie; saa følger at naar Sider-
nes Antal i en regulær Polygon kaldes n , er Buer
hvorpaa enhver af dens Polygon Vinkler staar

$$= 360^\circ \frac{n}{2} \times 360^\circ \text{ og Vinklen har til Maaal det}$$

halve deraf som er $180^\circ \frac{360^\circ}{n}$; men da efter

førige Tillæg Centervinklen i enhver regulær Poly-

gon er $\frac{360^\circ}{n}$ saa sees at Polygonvinklen er

des ved at subtrahere Centervinklen fra 180° . Efter disse Formet lade Center- og Polygonvinkler sig beregne i alle regulære Polygoner, naar Sidernes Antal er bekendt.

§. 55.

Opgave: Om enhver regulær Figur at beskrive en Cirkel.

Oplos. Figuren være $ABDEFG$ (Fig. 29.) naar da to af Polygonvinklerne s. Ex. ved A og B deles i 2 lige Dele, saa vil Delingslinierne fæde sammen og bestemme Centrum C , hvorfra med Radius CA eller CB en Cirkel lader sig beskrive som vil gaa igiennem alle Figurens Hjørner og altsaa være en omstreven Cirkel (§. 51.).

Bevliis: Trækkes Linier fra C til alle Polygonens Vinkelspidser CG, CF &c. saa blive alle de derved opkomne Triangler ligestore (§. 15.) og altsaa Linierne CA, CB, CD , &c. alle lige lange, folgelig ligge alle Punkterne A, B, D, E, F, G lige langt borte fra C og altsaa i Peripherien af en Cirkel, hvis Centrum er C .

Lill. Fældes fra C lodrette Linier paa Polygon Siderne som CH (Fig. 29.) vil de alle blive lige lange (da enhver af Trianglerne derved deles i to lige store Triangler) og med en af dem

til

til Radius lader sig ogsaa en Cirkel indskrive i Polygonen.

Anm. Centrum til disse Cirkler i og om Polygonen kaldes ogsaa Polygonens Centrum, og den omkrevne Cirkels Radius AC Polygonens største og den indskrevne Cirkels Radius CH dens mindste Radius.

§. 56.

Opgave: Paa en given ret Linie at afsætte en regulær Polygon af et bestemt Antal Sider.

Oplos. Linien være AB , Polygonsidernes Antal f. Ex. 5 (Fig. 28.) Polygon Vinklen betegnes (§. 54. Till. 2.) og ved Hjælp af Transportsenren (mekanisk) afsættes den halve Polygon-Vinkel ved $A = CAB$ og den halve ved $B = CBA$ Linierne fra A og B forlænges til de Kiære hinanden i C , fra C beskrives en Cirkel med Radius CA , og Chorden AB omsøres i Cirklen som da vil blive inddelt i de forlangte fem Dele og Polygonen saaledes affat.

Bevijs: Vinklen ACB maa blive $= 2R - (CAB + CBA)$ (§. 29. Till. 1.) og blive Opfyldningen til Polygon-Vinklen og ogsaa blive Center-Vinklen i en Polygon, hvis Størrelse er $2R$ (§. 54. Till. 2 og 3.). Saaledes vil den her i Samfanden være $180^\circ - (2 \times 54^\circ) = 180^\circ$

$360^{\circ} - 120^{\circ} = 240^{\circ}$ som en Femteparten af
den hele Peripherie, der saaledes lader sig dele i
ligestore Dele, og i

• • • • • Opgave: •

tegne en regulær
Der, naar Cirklen
forlangte Antal i

Oplos. •
Antal Dele (§. 53.
gerne trækkes, kan
blive Siderne til d
vel Sider som Vi
Polngonen, altsaa

Om Forhold og Proportion mellem Linier
og Figurers Ligebedthed.

• • • • • §. 54. •

Forst. En Størrelse (fx. Linien AB)
som nøyagtig kan udtrykkes ved en anden CF
hæder af været et Mangefold (multiplicum) af den
anden; og denne af være en aligvort Deel (part ali-
quota) submultiplicum af den første og indeholdes
altsaa deri et vist Antal Gange (fx. AB er
3 CF , og $CF = \frac{1}{3} AB$.)

For

Forholdet mellem to Linier bestemmes ved at undersøge hvor ofte den ene indeholdes i den anden. Er den ene Linie en aliquot Deel af den anden bliver Exponenten et heelt Tal som f. Ex. Forholdet mellem AB og CF , hvor Exponenten er 3. Er derimod den mindre Linie ikke nogen aliquot Deel af den større; men en aliquot Deel af den mindre er tillige en aliquot Deel af den større, da bliver Exponenten en uegentlig Brøk hvis Ræoner udtrykker Antallet af de aliquote Dele som den mindre Linie er deelt i og Tælleren angiver Hørmånge af disse Dele der indeholdes i den større Linie. F. Ex. Exponenten i Forholdet mellem AB og CH er $\frac{11}{3}$ da CH er indeelt i 3 ligestore Dele og af disse indeholdes 11 i Linien AB . I begge disse Tilfælde siges Forholdet at være rationalt og Linierne siges at være commensurable Størrelser (sammenlign. Arithm. §. 69.).

Er derimod en af saa liden aliquot Deel af den ene Størrelse ikke nogen aliquot Deel af den anden, da siges Størrelserne at være incommensurable og Forholdet irrationalt. Men da den mindre Størrelse kan sættes ind i den større saa mange aliquote Dele, at een af disse Dele bliver mindre end enhver af saa liden given Størrelse, saa følger at den irrationale Deel af Forholdet bliver mindre end enhver af saa liden given Brøk; thi

den

den aliquote Deel af den ene Størrelse; kan vel ikke ganske udmaale den anden, men efterlader en Rest der altid er mindre end den aliquote Deel, da nu den aliquote Deel steds kan tænkes mindre, saa maa og den blevene Rest; tilsidst blive mindre end enhver bestemt endelig Størrelse og saaledes det irrationale Forhold mellem to Størrelser nærme sig til det rationale.

Ex. 1. To irrationale Forhold $A : B$ og $C : D$ ere ligestore naar en vis aliquot Deel af B ($\frac{1}{m} B$) indeholdes ligesaa ofte med en Rest (n Gange $+ R$) i A som samme aliquote Deel af D ($\frac{1}{m} D$) indeholdes i C med en Rest (n Gange $+ R$) thi da jeg efter den anførte Forklaring kan tænke en af de aliquote Dele mindre end enhver given Størrelse, saa følger at det irrationale Forhold kan bringes det rationale saa nær at Forfælsken kan ansees som umærkelig.

Ex. 2. Da alle Forhold lade sig udtrykke i Tal, og alle Størrelser lade sig betragte som Tal, saa gielder alt hvad i Arithmetiken er sagt om Forhold og Proportioner i Tal ogsaa om Forhold og Proportioner imellem udtrukte Størrelser.

Anm. I Forhold og Proportioner mellem ubestemte Tal ere alle Ledene af samme Art. Her maa vel Ledene i samme Forhold være Størrelser af en Art; men

men i en Proportion, Kunde Ledene i det første Forhold være saavel af samme Art, som Ledene i det andet Forhold, som og af forskjellig.

§. 59.

Læresæt. Antages den ene af en Triangels Sider ACB (Fig. 30.) at være indelt i et vist Antal ligestore Dele, CD , DE , EF , FA og der trækkes Paralleler igiennem alle Delingspunkter, da vil den modstaaende Side blive inddeelt i ligesaa mange ligestore Dele CG , GH , HI , &c.

Bevis: Trækkes Hielpelinien GK parallel med AC , fremkommer Trianglen GKH nu er

$$\begin{aligned} GK &= ED = CD \quad (\S. 30. \text{ Till. 1.}) \\ \angle HGK &= \angle HCD \\ \angle CHK &= \angle CGD \quad \left[\begin{array}{l} \S. 28. \end{array} \right] \end{aligned}$$

Triangl. $GKH = \text{Triangl. } CDG$

og $CG = GH$.

Paa samme Maade bevises GH , HI og IB at være ligestore.

Till. En given Linie AC (Fig. 34.) deles paa Grund heraf i et forlangt Antal af ligestore Dele ved at affætte fra A under en vilkaarlig Vinkel en anden ret Linie AB af ubestemt Længde og paa den affætte det forlangte Antal Dele AH , HI , IK , KE , LB dernæst sammenbinde Punkterne B og C

og

og igiennem alle Delingspunkterne L, K, I, H trække Paralleler med BC , som da vil dele den givne Linie i det forlangte Antal ligestore Dele.

§. 60.

Læresæt. Er i en Triangel ACB (Fig. 31.) Linien DE trukket saaledes, at den skærer de to Sider og er parallel med den tredje, da skal følgende Proportioner finde Sted: 1) $CA : DA = CB : EB$. 2) $CD : DA = CE : EB$. 3) $AC : DE = AB : DE$.

Beviis: 1) Er DA en aliquot Deel af CA saa vil naar der trækkes Paralleler (§. 59.) EB være en ligesaa stor aliquot Deel af CB og altsaa Exponenten i begge Forholdene den samme og Proportionen rigtig (Arith. §. 70.). Er DA ikke nogen aliquot Deel af CA bestemmes Exponenten efter §. 58. og ved at tænke Paralleler trukne, vil Exponenten i Forholdet $CB : EB$ findes at være den samme, thi sæt at DA inddeles i m Dele og en af disse indeholdes n Gange i CA , saa at $CA : DA = n \times \frac{1}{m} DA : DA$ og

$$\frac{CA}{DA} = \frac{n \times \frac{1}{m} DA}{DA} = n \times \frac{1}{m} = \frac{n}{m}$$

saa vil efter §. 59. ved Paralleler, EB ligeledes inddeles i m Dele og en af disse vil indeholdes n Gange

Stange i CB og ogsaa $CB : EB = n \times \frac{1}{m}$

$$EB : EB \text{ og } \frac{CB}{EB} = \frac{n \times \frac{1}{m} EB}{EB} = n$$

$$\times \frac{1}{n} = \frac{n}{n}$$

2) Af Proportionen $CA : DA = CB : EB$ følger $(CA - DA) : DA = (CB - EB) : EB$ (Arithm. §. 73. 3.) $\therefore CD : DA = CE : EB$.

3) Igennem Punktet D trækkes en Hjelpe-linie DI parallel med CB , saa er efter No. 1. $AC : DC = AB : BI$ men $BI = DE$ (§. 30. Eft. 1.) ogsaa $AC : DC = AB : DE$.

Eft. Af disse beviste Proportioner lade sig udlede mange andre efter Arithm. §. 73.

§. 61.

Udsees. Ere de to Sider i en Triangel ARC (Fig. 31.) deelte saaledes at $CA : DA = CB : EB$ saa er Skæringslinien DE parallel med Triangelens tredje Side AB .

Bevis: Igennem ethvert Punkt lader sig trække en Linie parallel med en given (§. 25.) og ogsaa DE ikke parallel med AB maatte igennem E kunde trækkes en anden Linie parallel med AB denne maatte enten falde oven for DE eller

men saa skulde $CA : DA = CB : FB$ (§. 60.) som er mod Betingelsen eller og neden for f. Ex. i G , da skulde $CA : DA = CB : GB$ som er ligeledes umuligt, naar den i Betingelsen anførte Proportion finder Sted; kan saaledes den med AB igiennem D lagte parallelle Linie hverken falde oven eller neden for DE maa den falde sammen med DE , og DE er altsaa parallel med AB .

Fig. 1. Staa to rette Linier AB, DC (Fig. 32.) imellem to parallelle Linier og overføres af en tredje EG som er parallel med AD og BC saa er $AE : EB = DG : GC$; thi naar Hjelpelinien AC trækkes er i ΔBAC efter den anførte Sætning

$AE : EB = AF : FC$ og i Triangelen ACD er $DG : GC = AF : FC$

altsaa $AE : EB = DG : GC$ (Arith. §. 38)
 Veed man derimod om Linierne AB og CD at de staa mellem to parallelle Linier og at $AE : EB = DG : GC$ saa er EG parallel med AD og BC .

Fig. 2. Ere Linierne AC og HB (Fig. 35.) parallelle og AB, CD staae derimellem og røre hinanden, da er $AE : EB = CE : ED$. thi naar AH trækkes parallel med CD og EG parallel med AC saa er i Triangeln HAB ; $AE : EB = AG : GH$ og i Triangeln HCD ; $CE : ED = AG : GH$ og

GH

$$GH = ED \text{ (§. 30. Till. 1.)} \text{ altsaa } AE : EB = CE : ED.$$

§. 62.

Lørefæt. Er i en Triangel ABC (Tab. 3. Fig. 1.) en Vinkel B delt i to lige Dele; saa skal Delingslinien BD dele den modstaaende Side AC i to Dele, der forholde sig til hinanden som Siderne, der indskærte den dannede Vinkel: $AD : DC = AB : BC$.

Bevis: Efter Betingelsen være Vinklen $ABD = DBC$; Linien CB forlænges og derpaa affættes $BE = AB$. Punkterne E og A sammenbindes, nu er Vinklen $BEA = EAB$ (§. 13. Till.) og $ABC = BEA + EAB = 2 BEA = 2 EAB$ (§. 29.) men efter Betingelsen var $ABC = 2 ABD = 2 DBC$ følgelig $2 BEA = 2 DBC$ og $BEA = DBC$ ligesaa $2 EAB = 2 ABD$ og $EAB = ABD$ altsaa Linien BD parallel med AE (§. 25.) følgelig $AD : DC = EB : BC$ (§. 61.) men $EB = AB$ (ved Construct.) altsaa $AD : DC = AB : BC$.

Modfæt. Skærer Linien BD Siden AC saaledes at $AD : DC = AB : BC$ saa er Vinklen ved B delt i to ligestore Dele.

Bevijs: Er Linien BC forlænget og $BE = AB$; saa er $AD : DC = EB : BC$ og
 følgelig BD parallel med AE (§. 61.) Vinklen
 $ABD = EAB$; og $CBD = BEA$ (§.
 28.) nu er $EAB = BEA$ (§. 13. Ell. 1.)
 altsaa $ABD = CBD$.

§. 63. I et Trapezium.

Løsefat. En i et Trapezium $ACDB$
 (Fig. 2.) da to Sider AC og BD parallel,
 da er den Linie EF som deler de to Sider der
 ikke ere parallelle i lige Dele, saa stor som de
 to parallelle Siders halve Summe: $EF = \frac{1}{2}$
 $(CD + AB)$.

Bevijs: Efter Betingelsen være $DF =$
 FB ; $CE = EA$; Diagonalen CB træffes;
 de parallelle Sider halveres i I og G , IF og
 EG træffes, saa er i Trianglen CDB

$$DI : IE = DF : FB \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{thi } DI = IE \\ \text{og } DF = FB \end{array} \right.$$

altsaa IF parallel med CB (§. 61.). I Trian-
 gelen CAB er ligeledes:

$$AE : EC = AG : GB$$

følgelig EG parallel med CB og da $CE =$
 EA , og $DF = FB$ saa er $CE : EA =$
 $DF : FB$

altsaa EF parallel med CD og AB (§. 61.)

lange Dele, og affatter derpaa fra Begyndelsen af Linien den sundne Quotient 135. Er Linien længere end Maalestokken, da bruges samme Fremgangsmaade med dens halve, tredie eller fjerde Part.

Anm. 3. Ved at dele Randen af Instrumenter ved koncentriske Cirkler i lige Dele, og ved Transversallinier igien dele disse, under den, efter Omstændighedens Størrelse mere eller mindre urigtige Forudsætning, at de derved frembragte Dele forholde sig som Ringkørne ved Middelpunktet; har man tilforn brugt den, ved Hielp af den formindskede Maalestok til rette Liniers Deling forklarede Methode, ogsaa til at dele Cirkelhuer. Nøjagtigere og bedre er Inddeelingen af Kvadranten, især om man i Stedet for 90 deler den i 96 lige store Dele, som ved bestandig Halvering lader sig gøre. En almindelig Methode til at dele saavel rette Linier som Cirkelhuer i lige Dele har man ved den saa kaldte Vernier eller Nonius, hvis Forklaring jeg, siønt den egentlig hører hen til den praktiske Geometrie, dog for dens almindelige Brugs Skyld her vil anføre.

§. 65.

Opgave: At tegne eller indrette en Vernier eller Nonius.

Oplos. AB (Fig. VI.) være en ret Linie eller en Cirkelhue, inddeelt paa Randen af et Instrument AC i 11 lige Dele; og paa en Plade AD , der lader sig skyde langs Instrumentets Rand og kaldes Vernier eller Nonius eller over AB ,

AB ; være samme Længde FD deelt i 10 lige Dele. Da nu samme Linie AB har paa Nonius AD een Deel mindre end paa Randen AC , og følgelig enhver Deel af AB er større paa AC end paa AD , $\therefore DG > CE$ saa fogner det an paa at finde Forskiellen mellem DG og CE .

Da AB er $\equiv 11 \times CE \equiv 10 DG$ saa er $10 : 11 \equiv CE : DG$ (Arith. §. 70.) følgelig $10 : (11 - 10) \equiv CE : (DG - CE)$ $10 : 1 \equiv CE : (DG - CE)$ (Arith. §. 73 Till. 3.) altsaa $DG - CE \equiv \frac{1}{10} CE$. Er nu $CE \equiv 1$ Tom, saa er $DG - CE \equiv \frac{1}{10}$ Tom $\equiv 1$ Linie. Er $CE \equiv 1$ Grad, saa er $DG - CE \equiv \frac{1}{10}$ Grad $\equiv 6$ Minuter. Saa meget altsaa som 1 Linie eller 6 Minuter, staaer da den første Deel paa Nonius over den første Deel paa Randen; følgelig den anden 2 Linier eller 12 Minuter o. s. v.

Brugen af Nonius lader sig heraf let forklare; thi skydes Nonius paa Randen af Instrumentet langs Linien AB , saa vil efterhaanden de fra G efter hinanden følgende Delingslinier paa Nonius falde sammen med de fra E efter hinanden følgende Delingslinier paa Randen; og BD vil rykke frem over BC , een, to, tre Dele af Nonius o. s. v.

§. 66.

Forkl. Figurer siges at være ligedanne (similes) naar deres Vinkler ere stykkeviis ligestore og de eenstaaende (d: de der staa lige over for de lige store Vinkler) Sider (latera homologa) ere proportionale s. Ex. Trianglerne ACB , DFE (Fig. 3.) Polygonerne $ABCDE$ og $abcde$ (Fig. 11.).

Lill. Da i regulære Figurer alle Sider og Vinkler ere ligestore, saa følger, at alle regulære Figurer af lige mange Sider ere ligedanne.

Anm. Ligedanheds Tegnet er (\sim) som sættes imellem Figurerne s. Ex. $ACB \sim DFE$ (Fig. 3.)

§. 67.

Forkl. Siderne i to Figurer (Fig. 15.) som indslutte lige store Vinkler ved A og D siges at være reciproque proportionale naar de to Sider i den ene Figur udgøre de yderste, og de to i den anden de mellemste Led i Proportionen: naar $AC : DF = DE : AB$.

Anm. I Almindelighed siges to Par Størrelser udtrykte i Tallet eller med Bogstaver a , b og c , d ; at være reciproque proportionale naar det ene Par udgør de yderste og det andet de mellemste Led i Proportionen.

$$a : b = c : d$$

§. 68.

Løstefæt. To Triangler ACB , DFE (Fig. 3.) ere ligedanne, naar Vinklerne i dem begge ere ligestore: $A \equiv D$; $B \equiv E$.

Bevijs: Paa DE affættes $DG \equiv AB$; paa DF ligeledes $DH \equiv AC$ Punkterne H og G sammenbindes, saa er Trianglen $DHG \equiv ACB$ (§. 12.) Vinklen $HGD \equiv CBA \equiv FED$ folgelig HG parallel med EF (§. 35.) og $DE : DF \equiv DG : DH$ (§. 61.) altsaa $DE : DF \equiv AB : AC$ (da $AB \equiv DG$ og $AC \equiv DH$) fremdeles $DE : EF \equiv AG : GH$ folgelig (da $HG \equiv CB$) $\equiv DE : EF \equiv AC : CB$ og Trianglen $ACB \sim DEF$ (§. 66.).

Lill. Er en ret Linie HG (Fig. 3.) i Triangelen DFE parallel med EF og altsaa Vinklerne ved H og G ligestore med Vinklerne ved F og E , saa ere Trianglerne DFE og DHG ligedanne.

§. 69.

Løstefæt. To Triangler ABC og DEF (Fig. 4.) ere ligedanne, naar deres Sider ere proportionale: $AB : AC \equiv DE : DF$; og $AB : BC \equiv DE : EF$.

Beviis: Paa DE affættes $DG \equiv AB$
ved G Vinkelen $DGH \equiv DEF$ følgelig HG
parallel med EF (§. 25.) og Trianglen DGH
 $\sim DEF$ (§. 68.). Men i Trianglerne ACB
og DGH ere

$$AB \equiv DG \text{ (ved Construction)}$$

$$\left. \begin{array}{l} AC \equiv DH \\ HG \equiv CB \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{thi } AB : AC \equiv DE : DF \\ \text{(efter Betingelsen)} \\ \text{og } DG : DH \equiv DE : DF \\ \hline AB : AC \equiv DG : DH \end{array}$$

$$\text{er nu } AB \equiv DG$$

$$\text{faa er } AC \equiv DH. \text{ (Næst)}$$

§. 70.) Paa samme Maade vides at $HG \equiv CB$
følgelig $ACB \equiv DHG$ (§. 14.) og altsaa deres
Vinkler ligestore, og de ligedanne; er nu ACB og
 DHG og $DHG \sim DEF$ faa er $ACB \sim$
 DEF .

§. 70.

Bærefet. To Triangler ABC og DEF
(Fig. 4.) ere ligedanne, naar een Vinkel er
ligestor i dem begge $A \equiv D$; og de to Sider
som indslutte Vinklen, ere proportionale :
 $DE : DF \equiv AB : AC$.

Beviis: Paa DE affættes $DG \equiv AB$
Vinklen $DGH \equiv DEF$; Vinklen HG er da
parallel med EF og Vinklen $GHD \equiv EFD$
og følgelig $DHG \sim DEF$ (§. 68.) men i

Trianglerne ACB og DHG ere

$$AB = DG \text{ (ved Konstrukti.)}$$

$$\angle A = \angle D \text{ (efter Betingelse)}$$

og $AC = DH$ (fordi $AB : AC = DE : DF$ og $DG : DH = DE : DF$ altsaa $AB : AC = DG : DH$ og da $AB = DG$ (ved Konstrukti.) saa er $AC = DH$ (Arithm. §. 70.)) altsaa $ACB \sim DHG \sim DEF$.

§. 71.

Lørefæt. En lodret Linie CD (Fig. 7.) sætter fra den rette Vinkels Spidse C i en retvinklet Triangel ACB paa Hypotenusen, des-
ker den retvinklede Triangel i to mindre Triangler ACD og CDB , der begge ere ligedanne med den hele og altsaa indbyrdes ligedanne.

Beviis: I Trianglen ACD og ACB er Vinklen $A = A$ og $CDA = R = ACB$ altsaa $\triangle ACD \sim \triangle ACB$; ligesledes er i $\triangle CDB$ og ACB , Vinklen $B = B$ og $CDB = R = ACB$ altsaa $CDB \sim ACB$ er

$$\text{nu } ACD \sim ACB$$

$$\text{og } CDB \sim ACB$$

$$\text{saa er } ACD \sim CDB.$$

Till. Den lodrette Linie CD bliver en mellemproportional Linie imellem Sædterne af Hypotenusen AD og DB , og enhver af Katheterne

terne

terne AC og CB blive mellemproportional Linier mellem det hylende Spøsthenuse og det ved Enheden anliggende og af Spøsthenusen afslaaarne Stykker
 2) $AD : DC = DC : DB$; $AB : AC = AC : AD$; og $AB : BC = BC : BD$. (§. 66. og 68.)

§. 72.

Læresæt. Naar to Chorder AB , CD (Fig. 8.) skære hinanden i en Cirkel, ere deres Stykker reciproque proportionale (§. 67. Anm.) 3) $AG : GC = GD : GB$.

Beviis: Linierne AC og BD trækkes: saa er i Trianglerne ACG og GBD ; Vinklen $AGC = BGD$ (§. 17.) $ACG = GBD$ (§. 44. Till. 2.) altsaa $\triangle ACG \sim \triangle GBD$ (§. 68.) og folgelig $AG : GC = GD : GB$.

Till. Bliver den ene Chorde AB en Diameter og antages at skære den anden under en ret Vinkel, da vil den halvere den anden (§. 46. Till. 2.) og det halve af Chorden CD vil blive en mellemproportional Linie mellem Diameterens Stykker; thi var $AG : GC = GD : GB$ og efter det anførte $GC = GD$ saa er $AG : GC = GC : GB$ (sammenlign. §. 71. Till.)

§. 73.

Læresæt. Naar to Sekanter AB , BD (Fig. 9.) fiære hinanden uden for en Cirkel; ere Sekanterne og deres uden for Cirklen liggende Stykker reciproque proportionale \therefore
 $AB : BD = BF : BE$.

Beviis: Naar Hielpelinierne AF , ED trækkes, er Vinklen $B = B$; $A = D$ (§. 44. Till. 2.) altsaa $\triangle ABF \sim \triangle BED$ og $AB : BF = BD : BE$ (§. 66. og 68.) og (efter §. 73. 4. Arithm.) $AB : BD = BF : BE$.

§. 74.

Læresæt. Fiære en Sekant AB og en Tangent BC (Fig. 10.) hinanden uden for en Cirkel; da er Tangenten en mellemproportional Linie imellem den hele Sekant og det Stykke, som ligger uden for Cirklen \therefore $AB : BC = BC : BD$.

Beviis: Trækkes Hielpelinierne DC og AC , saa er $\triangle ABC \sim \triangle DCB$ (§. 68.) fordi Vinklen $B = B$; og Vinklen $DAC = DCB$ (§. 44. og 48.) altsaa $AB : BC = BC : BD$ (§. 66. og 67.).

Fig. VII. 9. at finde en fjerde proportional
Linie.

Opgav. Givte givne Linier A, B, C
(Fig. VII. 9) at finde en fjerde proportional
Linie.

Oplos. Man affætter en Linie $MN = A$ og i samme Direktion $NO = B$; vedet en vilkaarlig Vinkel affættes ved M , $MP = C$. Punkterne N og P sammenbindes og igiennem O sættes OR parallel med NP , saa er PR den søgte fjerde proportionale Linie.

Bevis: I Triangelen OMR er NP parallel med OR ved Konstruktion og altsaa (§. 60.) $MN : NO = MP : PR$.

III. Paa samme Maade findes en given Linie i Dele, der forholder sig til hinanden som Dele af en anden given Linie.

Fig. VII. 10. §. 76. 18. 18. 18.

Opgav. Givte to givne Linier CD og AB (Fig. 7.) at søge en mellemproportional Linie.

Oplos. Man affætter Linien $AD = AB$ og $DB = CD$ i en ret Linie AB , over denne slaes en halv Cirkel, og fra Punktet D til Cirkelns Peripherie opreises en lodret Linie (§. 41.) DC , som er den søgte mellemproportional Linie.

(24) Bevis:

Beviis: Træffes Linierne AC og CB saa er Vinkelen $ACB \equiv R$ (§. 44. Ell. 3.) og Triangleren retvinklet og folgelig $AD : DC \equiv DC : DB$ (§. 71. og 72. Ell.).

Ell. En anden Opløsning af denne Opgave følger af §. 74. og §. 46. Ell. saaledes som

§. 77. og 4. Ell. saaledes som

Forst, En Linie AB (Fig. VII.) siges at være deelt i det mellemste og yderste Forhold (secundum mediam et extremam rationem) eller i en sammenhængende Proportion, naar det første Stykke er en mellemproportional Linie mellem den hele Linie og det mindre Stykke a : naar $AB : AD \equiv AD : DB$.

§. 78.

Opgav. At dele en given Linie AB (Fig. VII.) i det mellemste og yderste Forhold.

Opløs. Paa Enden af AB opreises en lodret Linie $BC \equiv \frac{1}{2} AB$, fra C med Radius CB beskrives en Cirkel, og C forbindes ved Linien AC og AD sættes $\equiv AE$ saa er $AB : AD \equiv AD : DB$ og AD er det første Stykke af Linien AB .

Beviis. Forlanges: A Cirkel. H saa da AB er lodret paa BC og folgelig en Tangent (§. 46.)

(§. 46.) saa er $AH:AB :: AB:AD$ (§. 74.)
 og følgelig $(AH - AB):AB :: (AB - AE):AE$ (Arithm. §. 73.) nu er $AB = 2$
 $CE = EH$ og $AD = AE$ (ved Construkt.)
 altsaa $(AH - HE):AB :: (AB - AD):AD$,
 det er $AD:AR = DB:AD$ og
 invertendo (Arithm. §. 73.) $AB:AD = AD:DB$.
 Fremdeles da $AC > AB$ (§. 22. Till. 1.)
 og $CE = \frac{1}{2} AB$ saa er $(AC - CE) = AD > \frac{1}{2} AB$
 og saaledes AD det største Stykke af Linien AB .

§. 79.

Lørefæt. Er Radius AC i en Cirkel (Fig. IX.) deelt i det mellemste og yderste Forhold, og Chorden AE tages lig det største Stykke af Radius DC saa er i den liggende de Triangel. ACE enhver af Vinklerne ved Grundlinien CAE og CEA dobbelt saa store som Vinklen ved Toppunktet C .

Bevis: Træktes Hjælpelinien DE er $\triangle ACE \sim \triangle ADE$ (§. 70.) fordi Vinklen $A = A$, og $AC:AE = AE:AD$ (eftes Betingelsen); altsaa Vinklen $AED =$ Vinklen C ; da nu fremdeles eftes Betingelsen $CE:EA = CD:DA$, saa er Vinklen E delt i to lige

Dele

Dele (§. 62.) og Vinklen $AED \Rightarrow \frac{1}{2}$ Vinkel E men Vinklen $C \Rightarrow AED$ altsaa $C \Rightarrow \frac{1}{2} E$.

Till. Heraf: sæt hvorledes en ligebenet Triangel beskrives hvori enhver af Vinklerne ved Grundlinien er dobbelt saa stor som Vinklen ved Topunktet.

§. 80.

Opgave: I en Cirkel at tegne en regulær Femkant og Lissant.

Opløs. Radius i den givne Cirkel være CA (Fig. 9.), den deles i det yderste og mellemste Forhold (§. 78.) saa at CD er mellemproportional Linien mellem CA og DA , fra A sættes Chorderne AI , $AE \Rightarrow CD$ saa er AE Siden i Lissanten og AE Siden i Femkanten.

Bevist: I Trianglerne ACE er Vinklen $CAE \Rightarrow 2 A$ og $CEA \Rightarrow 2 C$ (§. 79.) altsaa $CAE + CEA + C \Rightarrow 5 C$, folgelig $5 C \Rightarrow 2 R$ v. 180° (§. 29. Till. 1.) og $C \Rightarrow \frac{180^\circ}{5}$ (§. 10. Till. 2.) $\Rightarrow \frac{360^\circ}{10}$; folgelig Buen

$BD \Rightarrow \frac{360^\circ}{10} \Rightarrow$ Tiende Dele af den hele

Cirkelperipherie (§. 2. Aukt. 2.) Buen AE lader sig altsaa sætte 10 Gange paa den hele Omkreds og naar Chorderne dertil trækkes, har man den regulære Lissant (§. 53. Till.), og fremdeles er

Buen

Buen $IAE = IA + AE = 2 AE$ (ved

Construktion) altsaa $= \frac{360^\circ}{5} =$ femte Parten

af den hele Peripherie, naar den altsaa affattes
fem Gange, og Chorderne trækkes, fremkommer
den forlangte regulære Femkant.

Opgave: I en given Cirkel at tegne en
regulær Femkant.

Oplos. Man beskriver i Cirklen (Fig. IX.)
en regulær Triangel FGK (§. 53. Till. 1.) og en
regulær Femkant (§. 20.) $EILGM$ saa er Buen
 FI en femtende Deel af den hele Peripherie, og
den dertil hørende Chorde er Siden til den forlang-
te Femkant.

Beviis: Buen IL er $LG = \frac{360^\circ}{5}$

altsaa Buen $ILG = \frac{2}{5} \times 360^\circ = \frac{4}{5} \times$
 360° men nu er Buen $GLE = \frac{1}{5} \times 360^\circ =$
 $\frac{1}{5} \times 360^\circ$ altsaa Buen $FI = (GLE +$
 $GLM) = \frac{1}{5} \times 360^\circ + \frac{1}{5} \times 360^\circ =$
 $\frac{2}{5} \times 360^\circ$ en femtende Deel af den hele Peri-
pherie.

Fig. 21. — §. 82. —

Førefat. Mangekantede ligedanne Figurer inddeles ved eensliggende (\therefore som ere trukne imellem ligestore Vinklers \vee Spidser) Diagonaler i ligemange ligedanne Triangler.

Beviis: Figurerne være $ABCDE$ og $abcde$ (Fig. 21.) Diagonalerne EcC , AaC saa er Vinklen $D \equiv d$ og $ED : DC \equiv ed :$ (efter Betingelsen og §. 66.) altsaa $\triangle EDC \sim \triangle edC$ (§. 70.). Fremdeles er $\angle DEA \equiv \angle dea$ (efter Betingelsen) $\angle DEC \equiv \angle deC$ (thi $\triangle EDC \sim \triangle edC$) folgelig $DEA - DEC \equiv dea - deC$ \therefore Vinklen $CEA \equiv cea$. Nu er $DE : de \equiv EA : ea$ (§. 52.) og $DE : de \equiv EC : eC$ (fordi $\triangle DEC \sim \triangle deC$) altsaa $EA : ea \equiv EC : eC$ og $\triangle AEC \sim \triangle aec$ (§. 70.) og saaledes kan ethvert Par af de oplaemte Triangler bevises at være ligedanne.

III. Inddeles altsaa en mangekanted Figur ved Diagonaler i Triangler, og der affattes andre med den ligedanne Triangler i samme Ordren, da bliver den derved frembragte Figur ligedan med den første.

§. 83. *Om ligestaaende Figurers Omfærd*

Tænk ligestaaende Figurers Omfærd
forholde sig til hinanden som to af deres end
staaende Sider eller endstaaende Diagonaler
i Peripherien $ABEDC$: $Periph. abedc =$
 $ED : ed$ (Fig. 11.).

Bevis: Da Figurerne ere ligestaaende saa er

$$AB : ab = AE : ae$$

$$AB : ab = ED : ed$$

$$AB : ab = DC : dc$$

$$AB : ab = BC : bc$$

$$AB : ab = (AB + AE + ED + DC + BC) : (ab + ae + ed + dc + bc)$$

$$= Periph. ABEDC : Periph. abedc$$

$$= AB : ab = ED : ed \text{ o. s. v. men } AB : ab = AC : ac$$

$$(fordi \Delta ABC \sim abc) \text{ all.}$$

$$\text{saa } Periph. ABEDC : Periph. abedc = AC : ac$$

$$AC : ac$$

$$ED : ed$$

§. 84.

Tænk ligestaaende Figurer AB

ED og $abedc$ (Fig. 12.) indskrævet i Cirkel,

saa forholde deres Omfærd sig, som Størrelse

af de omskrevne Cirkler.

Bevis: Et Røg, Cirklerne indskrævet

ter, og altid AG og AD Diametere og man

strækker AC , BG i den ene, og ac , bg i den anden Figur, saa er Vinklen $ABC =$ Vinkl. abc og $AB : ab = BC : bc$ (§. 66.) følgelig Vinkl. $BCA = bca$ og derfor $BGA = bga$ (§. 44. Till. 2.) fremdeles er Vinklen $ABG = abg$ (§. 44. Till. 3.) altsaa $\Delta ABG \sim \Delta abg$ (§. 68.) og $AB : ab = AG : ag = AF : af$. Men Figurernes Peripherier forholde sig som $AB : ab$ (§. 83.) følgelig ogsaa som $AG : ag$ eller som $AF : af$.

Till. 1. Da alle regulære Figurer af ligemange Sider ere ligedanne, og de alle kan indskrives i Cirkler (§. 55.) og omskrives om Cirkler, saa forholde deres Peripherier sig som Radierne i de ind- eller omskrevne Cirkler.

Till. 2. Ere to regulære Figurer bestrevne den ene i, den anden om, samme Cirkel, (en Side i den omskrevne være f. Ex. LM og en Side i den indskrevne AB (Fig. 29.)) saa forholde deres Omfærdse sig til hinanden som $CL : CA = CA : CD$.

Till. 3. Da flere Sider to ligedanne regulære Polygoner, som ene bestrevne i og om samme Cirkel saa, to mindre Cirkler bliver der imellem Radierne i deres Omskrevne Cirkler, og de Polygonernes Peripherier forholde sig som disse Radiers værdier, de sig seeste mere til hinanden.

§. 85.

Opgave: At beskrive i og om en Cirkel to regulære Polygoner af lige mange Sider, saaledes at Exponenten af Forholdet mellem deres Peripherier er mindre end ethvert givet Tal, der er noget lidt større end een $\alpha < 1 + \frac{1}{m}$.

Oplos. Peripherien af den omskrevne Polygon vil vi kalde P og af den indskrevne p . I Cirklen beskrives en regulær Polygon hvis ene Side være AB , (Fig. 29.) og om Cirklen en af ligesaa mange Sider hvis ene Side være LM ; saa er $P : p = CL : CA$ (§. 84. Till. 2.) og $\frac{P}{p} = \frac{CL}{CA}$ er nu CA deelt i m Dele hvoraf

$$AL \text{ er een saa er } \frac{CL}{CA} = \frac{CA + \frac{1}{m} CA}{CA} \\ = 1 + \frac{1}{m}; \text{ nu beskrives to andre Polygoner}$$

af et dobbelt Antal Sider, saaledes at Siden i den indskrevne er AD og i den omskrevne NC saa er:

$$P : p = CN : CA \text{ og } \frac{P}{p} = \frac{CN}{CA} \text{ nu} \\ = 2$$

er

er $CN < CL$ altsaa $\frac{CN}{CA} < \frac{CL}{CA}$

$$\frac{CN}{CA} < \frac{CA + \frac{1}{m} CA}{CA}$$

$$\frac{CN}{CA} < 1 + \frac{1}{m}$$

og da $\frac{P}{p}$ var $= \frac{CN}{CA}$ saa er $\frac{P}{p} < 1 + \frac{1}{m}$

$$+ \frac{1}{m}$$

III. 1. Der lade sig i Folge heraf beskrive to Polygoner i og om Cirklen af saa mange Sider at Differencen imellem deres Peripherier er mindre end enhver nok saa liden Deel af Radius \therefore at $d < \frac{1}{m} CA$.

Bevijs: Efter forrige §. var $\frac{P}{p} < 1 + \frac{1}{m}$

$\frac{1}{m}$ antages nu enhver af disse m Dele deelt i g

mindre Dele, saa er $\frac{P}{p} < 1 + \frac{1}{m} \times \frac{1}{g}$

men Valdes Differencen imellem Polygonernes Peripherier d saa er

$$P =$$

$$P = p + d \text{ altsaa } \frac{p+d}{p} < 1 + \frac{1}{m} \times \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{d}{p} < 1 + \frac{1}{m} \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{p} < \frac{1}{m} \times \frac{1}{2}$$

$$d < \frac{1}{m} \times \frac{1}{2} p$$

men da en om Cirklen beskrevet Kvadrat er 2 Gange saa stor som Radius, og Cirkels Peripherie er mindre end Peripherien af enhver omfættende Figur og Peripherien af en indskreven Figur igen mindre end Cirkel Peripherien, saa følger at $p < 2 \cdot CA$ og altsaa $\frac{1}{2} p < CA$ var

altsaa $d < \frac{1}{m} \times \frac{1}{2} p$, saa er ogsaa $d < \frac{1}{m} \cdot CA$.

Dermed er det bevist, at den om Cirklen beskrevne

Sil. 2. Kalder Differenten, i hvilken Cirkels Peripherie (II) og den ind eller omfættende Polygons Peripherie d , saa følger, da Cirkels Peripherie er større end Peripherien af enhver indskreven og mindre end Peripherien af enhver om

skreven Polygon, at $p < 2 \cdot CA$ og følgelig $\frac{1}{2} p < CA$ (i Sil. 1. og Sil. 2.) ved navn af CA . Dermed altsaa følger, at den om Cirklen beskrevne

Læreset. Fladerne af Triangler (ABC og DEF Fig. 16 og 17.) og Parallelogrammer i Almindelighed forholde sig som Produkterne af deres Grundlinier og Høider; eller ere i et Forhold; sammensat af Forholdene mellem deres Grundlinier AB og DE og Høider CH og EI .

Bevis: Linien EI i $\triangle DEF$ forlænges til G saa at $IG = CH$ og fra G trækkes Linier til D og F . Naar nu Trianglerne ABC og DEG sammenlignes:

saa er $ABC:DEG = AB:DE$ (§. 86.)
 ligeledes er $DEG:DEF = CH:EI$
 (§. 87.)

altsaa $ABC:DEF = AB \times CH:DE \times EI$ (Arithm. §. 74.)
 eller $ABC:DEF = \left[\begin{array}{l} AB:DE \\ CH:EI \end{array} \right]$

Anm. Beviset for Parallelogrammer føres paa samme Maade.

§. 89.

Læreset. Ere to Triangler ABC , DEF (Fig. 37.) (og to Parallelogrammer) lige store; saa ere deres Grundlinier og Høider reciproque proportionale s: $AB:DE = GF:CH$.

CH. Og ere Grundlinier og Høider i to Triangler eller Parallelogrammer reciproque proportionale: saa ere de ligestore.

Bevlis: 1. $\Delta ABC : \Delta DEF = AB \times CH : DE \times FG$ (§. 89.) nu er $ABC = DEF$ (efter Betingelsen) altsaa $AB \times CH = DE \times FG$ (Arithm. §. 70.) og følgelig $AB : DE = FG : CH$ (Arithm. §. 71. Till. 2.).

2. Er $AB : DE = GF : CH$ (efter Betingelsen) saa er $AB \times CH = DE \times GF$ (Arithm. §. 71.) og da $\Delta ABC : \Delta DEF = AB \times CH : DE \times FG$ saa naar $AB \times CH = DE \times FG$ er ogsaa $\Delta ABC = \Delta DEF$.

Anm. Bevist for Parallelogrammer søges paa samme Maade.

Till. 1. Ere fire rette Linier proportionale, saa er Rectanglet af de to yderste i Proportionen lig Rectanglet af de to mellemste.

Till. 2. En Quadrat $EFGH$ (Fig. 20.) er ligesaa stor som en Rectangel $ABCD$ (Fig. 18.) naar Quadratens Side er en mellem Proportionals Linie mellem Rectanglens Grundlinie og Høide, og omvendt.

med $AB : EF = EF : CD$ eller $AB \times EF = EF \times CD$

§. 90.

Læresæt. Ere i to Triangler ABC , DEF (Fig. XI.) (ogsaa i to Parallelogrammer) en Vinkel $A = D$ og de Sider som indeslutte de ligestore Vinkler ere ^{reciproque} proportionale, (§. 67.) saa ere Trianglerne ligestore. Og ere to Triangler ligestore og have en ligestor Vinkel, da ere de Sider som indslutte de ligestore Vinkler reciproque proportionale.

Bevist: 1. Efter Betingelsen er $AB : DE = DF : AC$; sælbes nu fra C og F de perpendicularære Høider CI og FH , saa er $\angle A = \angle D$, og $\angle CIA = R = \angle FHD$ (ved Konstruktion) altsaa $\triangle ACI \sim \triangle DFH$ (§. 68.) og $DF : AC = FH : CI$ (§. 66.) folgelig $AB : DE = FH : CI$ og $\triangle ABC = \triangle DEF$ (§. 89.).

2. Ere Trianglerne ligestore, saa er naar Høiderne sælbes $AB : DE = FH : CI$ (§. 89.) men er Vinklen $A = D$, saa er $\triangle ACI \sim \triangle DFH$ altsaa $FH : CI = DF : AC$ og folgelig $AB : DE = DF : AC$.

Anm. For Parallelogrammer særes Beviset paa samme Maade.

Sill. 1. To Triangler ACB og DFE (Fig. XI.) som og Parallelogrammer som have en ligestor Vinkel $A = D$ ere i et Forhold til hinanden

anden, sammensat af Forholdet mellem de Sider der indslutte de ligestore Vinkler eller forholde sig som Produktet af de Sider der indslutte de ligestore Vinkler

$$\text{thi } \triangle ACB : \triangle DEF = \left[\begin{array}{l} BB : DE \\ CI : FH \end{array} \right. \quad (\S. 88.)$$

men $\triangle ACI \sim \triangle DFH$ altsaa $AC : DF = CI : FH$ følgerig

$$\triangle ACB : DEF = \left[\begin{array}{l} AB : DE \\ AC : DF \end{array} \right. = AB \\ \times AC : DE \times DF.$$

Ex. 2. Forholdet mellem to Quadrater er dobbelt saa høit som Forholdet mellem deres Sider, eller to Quadrater forholde sig som Quadraterne af deres Sider.

§. 91.

Læresæt. Glæderne af to ligestanne Triangler $\triangle ACB$ og $\triangle DEF$ (Fig. 16. og 17.) forholde sig som Quadraterne paa m. af deres eensltaaende Sider.

$$\text{Bevis: } \triangle ACB : DEF = \left[\begin{array}{l} AB : DF \\ AC : DE \end{array} \right. \quad (\S. 88.) \triangle ACB \sim \triangle DEF \text{ (efter Betingelsen)}$$

$$\text{altsaa: } AB : DF = AC : DE \\ \triangle ACH \sim \triangle DEI \text{ (thi } \angle A = \angle D, \angle C = \angle E)$$

$\angle EID : \angle R = CHA$ følgende: $CH : EI$
 $= AC : DE$; ligefort Verhold kan sættes i
 Steden for hinanden; og således er $\Delta ACB :$

$$\Delta DER :: \begin{cases} AC : DE \\ AC : DE \end{cases} = AC^2 : DE^2.$$

Anm. Paa samme Maade bevises at de forholde sig
 som Quadraterne paa deres eenstaaende Grundlinier,
 og eenstaaende Sider.

§. 92.

Læresæt. Manglefantede ligedanne Figurer
 Overflader $ABCDE$ og $abcde$ (Fig.
 11, 12.) forholde sig som Quadraterne paa en
 af deres eenstaaende Sider.

Bevist: Ved Diagonaler inddeles Figurerne
 i ligemange ligedanne Triangler (§. 82.) og
 saa er

$$\Delta EDC : \Delta e d c = ED^2 : ed^2$$

$$\Delta EAC : \Delta e a c = EA^2 : ea^2 = ED^2 : ed^2$$

$$\Delta ABC : \Delta abc = AB^2 : ab^2 = ED^2 : ed^2$$

$$\text{altsaa } \Delta (EDC + EAC + ABC) : \Delta (edc + eac + abc)$$

$$= ED^2 : ed^2$$

$$\Delta ABCDE : \Delta abcde = ED^2 : ed^2.$$

Regulære Figurer af lige Antal
 Sider forholde sig som Quadraterne paa Radii eller
 Diametere i deres omstrebne og indstrebne
 Cirkler.

En.

Till. 2. Da Cirkler kan anses som regu-
 lare, uendelig mangelfaustede. Polygoner. (§. 85.
 Till. 2.) saa følger: at alle Cirkler ere ligedannede Fi-
 gurer, og at deres Glæder forholde sig som Quadra-
 terne paa deres Radii, eller Diametre.

Om Liniers og retlinede plane Figurers Udmaalning.

§. 93.

Forsl. At udmaale en Størrelse er at
 sammenligne den med en bekendt Størrelse af
 samme Art, som kaldes Maal eller Maalestof.
 Til at udmaale rette Linier, bruges altsaa en Li-
 nie til Maalestof; til at udmaale Glæder, en Glæ-
 de, og til at udmaale Legemer et Legeme. Den
 vilkårlige rette Linie som antages til Henhed eller
 Maal for Linier kaldes en Fod. Foden inddeles
 igien enten efter Decimal-Inddeling i ti Tom-
 mer, og Tommen i ti Linier, og ti Fod gøre en
 Rode, eller efter Quodecimal-Inddeling i 12
 Tommer, Tommen i 12 Linier. Disse
 Dele betegnes ved (°, ' , " , '') altsaa som Gra-
 der, Minuter, Sekunder f. Ex. 7°, 10'',
 9''', læses 7 Græder, 7 Fod, 10 Tommer, 9
 Linier.

Till.

III. 1. I Decimalmaal forvandles det større Maal til det næstfølgende mindre ved at sætte et Null til f. Ex. $80' = 800'' = 8000'''$ det mindre derimod til det næstforegaaende høiere ved med et Comma at afskære det yderste Siffer mod høire og ansee det som Decimalbrøk f. Ex. $3487''' = 348,7'' = 34,87' = 3,487^{\circ}$.

III. 2. I Duodecimalmaal derimod forvandles større Maal til mindre ved at multiplicere, og mindre til større ved at dividere med 12.

Anm. 1. Længden af en Fod er meget forskellig i de forskellige Lande, og man maa derfor ved omhyrdelig Opmærksomhed bestemme hvad Længde Foden har. Det er altsaa vigtigt at kende Forholdet imellem Fodmaalet i forskellige Lande og Steder. Nogle af de vigtigste Landes og Steders Fodmaal kendes af følgende Tabel; som viser hvor mange Pariser Linier (hvoraf 1 Fod har 128,5) Foden har andre Steder.

| | | |
|---------------------|--------|----------------|
| En Fod i Nachen har | 128,5 | Pariser Linier |
| Amsterdam | 125,5 | |
| Berlin | 137,6 | |
| Stettin | 128,5 | |
| Moskwa | 128,5 | |
| Petersburg | 129,1 | |
| Engelland | 136,16 | |
| Frankfurt | 127 | |
| Hamburg | 127 | |

| | | |
|-----------------------|--------|----------------|
| En Fod i Holsteen har | 132,3 | Pariser Linier |
| Königsberg | 139,12 | |
| Österrigke Nederlande | 126,6 | |
| Paris | 144 | |
| Portugal | 145,3 | |
| Rhinlandt | 139,13 | |
| Rom | 110,9 | |
| Rusland | 135 | |
| Sachsen | 125,1 | |
| Schweiz | 133 | |
| Spanien | 125,3 | |
| Sverrig | 131,6 | |
| Strasburg | 128,2 | |
| Venedig | 153,7 | |
| Wien | 140,12 | |
| Zürich | 133 | |

Anm. 2. Efter den allernæste Opmaalning af en Meridiangrad i Frankrig er af National-Conventen decreteret en almindelig Reform i Maal og Vægt. I Mæret 1798 er igien skeet fra Direktorium i den franske Republik en Indbydelse til andre Stater, at sende lærde og kyndige Mænd til Paris for at overlægge med de dertil udnævnte Pariser Lærde, om at bestemme en almindelig Grund for alle Maal og Vægt. Saa ønskeligt og nyttigt som dette vilde være, saa mange Vanskeligheder vil det være underkastet. Man venter imidlertid med Længsel hvad Udfaldet af disse Deliberationer vil blive. Hersra er efter Regteringens Anmodning og paa dens Beføstning Justitsraad og Professor Bugge reist i dette Ørendt til Paris.

§. 94.

Opgave: At forvandle Duodecimalmaal til Decimalmaal og omvendt.

Oplosn. Antager man Goden at være den samme, saa, da den efter Decimalinddeling er $\equiv 10$ Tomme og efter Duodecimal $\equiv 12$ Tomme, følger at, naar vi kalde Duodecimaltomme z og Decimaltomme y , ere $10 y \equiv 12 z$ og altsaa $y \equiv 1,2 z$ og $z \equiv 0,8333 y$. Decimaltommer forvandles altsaa til Duodecimal ved at multipliceres med $1,2$ og Duodecimaltommer til Decimal ved at multipliceres med $0,8333$ f. Ex. 7 Decimaltommer er $\equiv 7 \times 1,2 \equiv 8,4$ Duodecimaltommer.

Gremdeles da en Tomme efter Duodecimalmaal er 12 Linier og efter Decimalmaal 10, saa følger at en Rod efter Duodecimalmaal er $\equiv 144$ Linier og efter Decimalmaal 100, altsaa naar vi kalde Decimallinien u og Duodecimal v saa ere $144 v \equiv 100 u$ og $u \equiv 1,44 v$ og $v \equiv 0,694 \dots u$. Forvandlingen skeer altsaa som ved Tommer ved Multiplication f. Ex. $8 u \equiv 8 \times 1,44 v \equiv 11,52 v$ og $8 v \equiv 8 \times 0,6944 \equiv 5,552 u$.

Anm. Forskiellige Landes-Godmaal reduceres naar man af den anførte Tabel veed Forholdet, efter Arithmetiken §. 77. 3.

§. 95.

Forkl. Da Maalestofften altid maa være af samme Art som Størrelsen der skal udmaales, saa følger, at til Fladers Udmaalning maa til Maalestof antages en Flade. Af alle plane Figurer har man dertil valgt Kvadraten, og Figurers Overflade siges at udmaales i Kvadratmaal, ved at see hvor ofte en vis antagen Kvadrat (der kaldes en Kvadratsod; Kvadrattomme, Kvadratlinie eftersom dens Side er een Sod, Tomme eller Linie) kan lægges om derpaa.

Anm. For at skilne Kvadratmaal fra Længdemaal pleier man almindelig efter Tallet som tilfælbegivet Mængden at skrive en lille Kvadrat (\square) f. Ex. 52 \square' , læses 52 Kvadratsod.

§. 96.

Opgave: At udmaale Overfladen af en Rectangel AC (Fig. 22.) med Maalestofften $abcd$.

Oplosn. Med een Side af den til Maalestof antagne Kvadrat ab , udmaales Rectanglens Grundlinie og Side; disse Linier multipliceres med hinanden og Produktet er Rectanglens Overflade i Kvadratmaal f. Ex. $AB = 5''$ og $AC = 3''$ saa er Rectangel Fladen $ABCD = 15 \square''$.

Beviss:

Bevijs: 1. Trækkes igiennem alle Delingspunkterne paa AB Linier parallelle med AD og BC og igiennem Delingspunkterne paa BC Parallelere med AB og DC saa vil hele Gladen blive inddelt i saa mange smaa ligestore Quadrater hvoraf een er $abcd$ som Produktet af AB og BC indeholder Eenheder. Antallet af Delene AB viser hvormange af de antagne Quadrater der kan ligge i en Rad og Delene i BC hvormange Rader der kan være.

Bevijs: 2. At udmaale Rectanglen $ABCD$ er at see hvorofte Quadraten $abcd$ kan legges om paa dens Overflade, nu forholde forskellige Parallelogrammer sig som Produkterne af deres Grundlinier og Høider (§. 88.) altsaa $abcd : ABCD = ab \times bc : AB \times BC$; er nu den antagne Quadrat $= 1$ Quadratsod eller Summe 1c. saa er $1 : ABCD = 1 \times 1 = 1 : AB \times BC$ og følgelig Gladen $ABCD = AB \times BC$ (Arithm. §. 73.).

Eill. I. Da Parallelogrammer, der have samme Grundlinie og Høide ere ligestore (§. 34.) saa følger, at enhver skiævvinklet Parallelogram kan forvandles til en Rectangel og dens Gladeindhold beregnes paa samme Maade som Rectangelens.

Exll. 2. Indholden af et Parallelogram $ABCD$ i Kvadratmaal divideret med Grundlinien AB giver Siden BC .

Anm. 1. For Kortheds Skyld udtrykker man det saaledes, at Parallelogramernes Grundlinier multipliceres med deres Høider; da disse Linier egentlig udtrykkes ved Tal og disse multipliceres med hinanden. At to Linier virkelig ikke kan multipliceres med hinanden indsees af Arithmetiken.

Anm. 2. At beregne en Figurs Overflade i Kvadratmaal kaldes ogsaa at finde dens Quadratur, eller at kvadrere den, især bruges denne Benævnelse om Cirkels- og andre framlinede Figurers Overflade.

§. 97.

Opgave: At udmaale en Kvadrat (Fig. 23).

Løsning. Man maalet en af dens Sider med Sidelinien af den til Maalestof antagne Kvadrat $abcd$ og kvadrerer Tallet som angiver Mængden af disse Dele f. Ex. Siden være $4ab$, saa er Gladen af Kvadraten $4 \times 4abcd = 16abcd$.

Bevis: Da Kvadraten er et retvinklet Parallelogram hvis Grundlinie og Høide ere ligestore, saa gielder det §. 96. førte Beviser ligeledes for den.

Exll. 1. Omvendt kan man ogsaa af en Kvadratsindhold finde Længden af en af dens Sider;

der; ved at udtække Roden af det Tal som angiver Fladeindholdet.

Till. 2. En Kvadratfod er efter Duodecimalinddeling 144 og efter Decimalinddeling 100 Kvadrattomme, en Kvadrattomme ligesaa efter sin Inddeling 144, og efter denne 100 Kvadratlinier.

Till. 3. Kvadratmaal efter Decimalinddeling forvandles altsaa let fra større til det næste mindre naar ved høire Side saies to Nuller til f. Ex. $485 \square' = 48500 \square'' = 4850000 \square'''$; og fra mindre til det næst foregaaende større ved at dividere med 100, som (efter Arithm. §. 83.) skeer meget let ved fra høire steds at affigere to Sifre f. Ex. $30709 \square''' = 307 \square'' 09 \square' = 5 \square' 07 \square'' 9 \square'''$. Men ved Duodecimalmaalsreduktion maa multipliceres eller divideres med 144.

Till. 4. Angaaende Sammenligning af Duodecimal- og Decimalkvadratmaal gielder hvad der er sagt §. 94. kun at her naar Roden antages uforandret, 100 Decimalkvadrattommer $=$ 144 Duodecimalkvadrattommer.

Till. 5. Til at reducere forskjellige Landes Kvadratmaal tages Kvadratet af de i Tabellerne §. 93. anførte Forholdstal og Reduktioner skeer efter Arithmetikon §. 77, 3.

§. 98.

Opgave: At udmaale Overfladen af en Triangel ACB (Fig. 21.)

Opløst. Fra en af Vinkelspidserne C sættes en perpendicular Linie CD som da er Triangelens Høide og AB dens Grundlinje (§. 33.) Disse Linier maales med den antagne Maalestofs (§. 95.) Sidelinie, og Antallet af Grundlinjens Dele multipliceres med Høidens og det fundne Produkt halveres, eller og Grundlinjen multipliceres med den halve Høide eller Høiden med den halve Grundlinie.

Bevijs: Fladeindholdet af ethvert Parallelogram findes ved at multiplicere dets Grundlinie med Høiden (§. 96.). Triangelen er Halvparten af et Parallelogram, der har samme Grundlinje og Høide (§. 33. Till. 2.) Dens Fladeindhold er altsaa Halvparten af et Parallelograms af samme Grundlinje og Høide.

Till. Er en Triangel ABC (Fig. 21.) Fladeindhold bekiendt og dens Grundlinie AB , da findes Høiden naar Indholden divideres med den halve Grundlinie. Dog giver dette Høiden for nogen bestemt Triangel, men som Helheden af en ubegrænset ret Linie som kunde lægges igiennem C parallel med AB , hvori Toppunkt.

punkterne maae falde af alle de ligestore Triangler, der kan tegnes over Grundlinien AB .

§. 99.

Opgave: At udmaale Indholden af et Trapezium $ABCD$ (Fig. 26.) som har to parallelle Sider.

Oploen: De parallelle Siders AB og CD halve Summa multipliceres med CE som bestemmer deres Afstand; det fundne Produkt giver da den forlangte Indhold $ABCD = \frac{1}{2} (AB + DC) \times CE$.

Bevijs: Trækkes en Diagonal fra C til A ; inddeles Trapeziet i Trianglerne ADC og ABC hvis Indholdssammenlagt udgior Trapeziets Indhold; nu er (§. 98.)

$$\begin{aligned} \Delta ACB &= \frac{1}{2} AB \times CE & \text{thi } AD \text{ er} \\ \Delta ADC &= \frac{1}{2} DC \times CE & \text{parallel med } CE \text{ (§. 39. Till. 3.)} \end{aligned}$$

$$\text{altsaa } \Delta ACB + \Delta ADC = ABCD = \frac{1}{2} (AB + DC) \times CE.$$

Opgave: At udmaale enhver given Polygons Overflade.

Oploen: Polygonen bære $ABCDE$, (Fig. 27.) ved Diagonaler inddeles den i Trianglerne

glerne DEC , EAC og ABC dækkende Flader beregnes efter §. 98. og Summen af disse giver Polygonens Fladeindhold.

Beviis: Da alle Triangelfladerne udgør hele Polygonfladen, saa indsees uden videre Beviis, at dens Fladeindhold maa være Summen af alle Trianglernes.

Anm. Ved at dele Polygonen ind i Trapezier med to parallelle Sider, lader dens Flade Indhold sig ogsaa beregne efter §. 99.

Lill. 1. En regulær Polygon lader sig dele i saa mange ligestore Triangler som den har Sider (§. 55. Lill.) hvis Høide bliver Polygonens mindste Radius; dens Indhold findes altsaa ved at beregne en af disse Trianglers Flade og multiplicere denne med Sidernes Antal.

Lill. 2. En regulær Polygon forvandles til en eeneste Triangel (§. 55. og §. 35.) hvis Grundlinie er Polygonens Omkreds (Perimeter) og Høiden Polygonens mindste Radius (Tab. 2. Fig. 29. og 33.) dens Indhold findes altsaa ved at multiplicere dens Perimeter med det halve af dens mindste Radius.

Om Cirkelns Udmaalning.

§. 101.

Læresætn. Overfladen af en Cirkel er saa stor som Fladen af en Triangel hvis Grundlinie er Cirkelns Peripherie og hvis Høide er Cirkelns Radius (Fig. 38.).

Beviis: I og om Cirklen lade sig beskrive regulære Polygoner af saa mange Sider at Exponenten af Forholdet imellem deres Perimetre og Flader er mindre end ethvert Tall, der er noget

lidet større end 1 ($< 1 + \frac{1}{m}$) og at Forskiellen

imellem deres Perimetre er mindre end en hver nok saa liden Deel af Radius, og at altsaa Forskiellen mellem Peripherie og Flade af Cirklen og den ind- eller omskrevne Polygon ligeledes er mindre end enhver nok saa liden Deel af Radius eller dens Quadrat. Bliver saaledes Forskiellen imellem Cirklen og den om- eller indskrevne Polygon tilfids saa ringe at den ikke mere kan angives, saa kan man ansee Cirklen som en Polygon af uendelig mange Sider, og uendelig smaa Buer af Peripherien ere ikke forskjellige fra Chorden eller Tangenten som hører dertil, og dens Overflade at bestaa af en uendelig Mængde smaae Triangler (§. 100. Till. 1. og 2.) der alle kan forvandles til een een-

ste Triangel hvis Grundlinie er Peripherien og
hvis Høide er Radius.

Zill. 1. Da alle Cirkler saaledes kan an-
sees som uendelig mangesidede regulære Polygoner,
saa følger at de alle ere ligedanne (§. 66. Zill.) og
at altsaa deres Peripherier forholde sig som deres
Radier eller deres Diametre (§. 92. Zill.) og de-
res Overflader som Quadraterne af Radierne eller
Diametrene.

Zill. 2. Naar Peripherien af en Cirkel lod
sig udmaale i retlinet Maal, kunde dens Indhold
nøjagtig bestemmes og dens Quadratur findes,
men da Peripherien kun kan findes ved Tilnær-
melse, nemlig ved at søge Perimeterne af ind- og
omskrevne Polygoner af saa mange Sider at For-
skjellen imellem dem og Cirkelperipherien vil blive
umærkelig, men dog nogen, saa kan Cirkelens
Quadratur heller ikke nøjagtigt bestemmes.

§. 102.

Opgav. Naar Siden i en regulær Po-
lygon er givet $= AB$ (Fig. 29.) og Polygo-
nens største Radius AC , da at finde 1) Po-
lygonens mindste Radius CD og 2) Siden i
en regulær Polygon af dobbelt saa mange Si-
der AE .

Oplosn.

Oplosn.

Oplosn. 1) Fra Quadratet af den givne første Radius subtraheres Quadratet af den halve Polygonside og af Resten udtrækkes Quadratroden, som da giver Størrelsen for den forlangte mindste Radius $\therefore CD = \sqrt{AC^2 - \frac{1}{4} AB^2}$.

Beviis: I Triangelen ACD er Vinklen $ADC = R$ altsaa $AC^2 = AD^2 + DC^2$ (§. 38.) og $CD^2 = AC^2 - AD^2$ men $AD = \frac{1}{2} AB$ og $AD^2 = \frac{1}{4} AB^2$ følgelig $CD^2 = AC^2 - \frac{1}{4} AB^2$ og $CD = \sqrt{AC^2 - \frac{1}{4} AB^2}$.

Exemp. Lad $AC = 1$ og AB Siden i en regulær Sektant og altsaa $= 1$ (§. 49. Till. 2.) saa er $CD = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,732. = 0,866.$

2) Den fundne mindste Radius CD subtraheres fra den største Radius, Differencen DE kvadreres, og adderes til Quadratet af den halve Polygonside AD ; af denne Summa udtrækkes Quadratroden, som er den forlangte Side AE .

Beviis: Triangelen ADE er retvinklet altsaa $AE^2 = AD^2 + DE^2$ men $AD = \frac{1}{2} AB$ og $DE = CE - CD$ altsaa $AE^2 = \frac{1}{4} AB^2 + (AC - CD)^2$ og $AE = \sqrt{\frac{1}{4} AB^2 + (AC - CD)^2}$.

Exemp. Antages som før $AC = 1$ og AB at være Sektantens Side $= 1$ saa er Sektantens

$$\begin{aligned}\text{Kantens Side } AE &= \sqrt{\frac{1}{4} + (1 - \sqrt{\frac{3}{4}})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + 1 - 2\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4}} = \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}}} \\ &= \sqrt{2 - \sqrt{3}} = 0,5176. \dots\end{aligned}$$

Anm. Paa samme Maade som man her af Sirkantens Side har fundet Tolvkantens, findes af denne fire og tyve kantens, af den 48 kanten o. s. v. indtil man endelig finder 768 kantens Side $= 0,0081811$ naar dette Talt multipliceres med 768 har man Perimetren af en 768 kant $= 6,28308$ naar Radius er $= 1$ altsaa naar Radius er $= \frac{1}{2}$ og Diametren $= 1$ er Perimetren $= 3,1415$

§. 103.

Opgave: Naar Cirkelns Radius AC (Fig. 29.) og Siden i den indskrevne Polygon AB er given, da at finde Siden ML i en omskreven Polygon af lige Antal Sider.

Oplosn. Er Polygonens mindste Radius beregnet efter (§. 102.) da findes den omskrevnes Side ML ved at søge en fjerde Proportionallinie til CD , CA , og AB . $\therefore CD : CA = AB : LM$ kaldes nu Cirkelns Radius r , den mindste Radius ρ . Siden i den indskrevne Polygon l og i den omskrevne L saa er: $\rho : r = l : L$ og altsaa $L = \frac{r \times l}{\rho}$.

Beviis: I Trianglen CCL er Linien AD parallel med CL altsaa $CD : CC = DA : CL$ (§. 60.) følgelig $CD : CC = \frac{1}{2} AB : \frac{1}{2} LM = AB : LM$ ∴ $\rho : r = l : L$.

§. 104.

Opgav. At finde Forholdet imellem en Cirkels Diameter og dens Peripherie.

Oplosn. Efter §. 102. og 103. søges Perimetren af en ind- og omskreven 12, 24, 48, 96, 192 kant. Da nu Cirkelperipherien er større end Perimetren af enhver indskreven og mindre end Perimetren af enhver omskreven Polygon, saa bestemmes derved Grændserne imellem hvilke Cirkelliniens Størrelse som ret Linie ligger. Fordobblen man nu videre Sidernes Antal i den i Cirklen beskrevne regulære Polygon, saa bliver Forskiellen imellem Perimeteren af en saadan Polygon og Cirkelns Peripherie tilfaldt mindre end enhver bestemt endelig Linie (§. 85.) Paa denne Maade lader Cirkellinien sig altsaa bestemme i retlinet Maal saa nøiagtig som det behøves, og tillige Forholdet imellem Diametren og Peripherien hvilket i alle Cirkler er det samme.

Føll. 1. Er nu Cirkelns Diameter $2'$ ($d = 2$) og Radius $1'$ ($r = 1$) saa er Chorden til den 768 Deel af Peripherien ∴ Siden i en indskreven

Skrevet 768 fant $\approx 0,0081811'$ (S. 102. Anm.)
 og følgende Perimeteren $\approx 6,28308'$ og heraf
 findes (S. 103.) Perimeteren af den vdt Cirklen be-
 skrevne regulære 768 fant $\approx 6,2831375'$ Cirkel-
 linien er altsaa større end $6,2830'$ og mindre end
 $6,2831$ og følgende omtrent $\approx 6,2830$ ($p \approx$
 $6,2830$) og $d : p \approx 2 : 6,2830 \approx 1 : 3,1415$.
 Benævnes nu Peripherien af en Cirkel hvis Dia-
 meter er 1 med π ; saa er $\pi \approx 3,1415$. Siger
 man nu paa den forklarede Maade Perimeteren af
 en Polygon der har 2, 4, 8 ic. Gange saa mange
 Sider, saa kan man stedse nøjagtigere og nærmere
 finde Forholdet mellem Diametren og Cirkelens Pe-
 riphærie, og noiere bestemme Værdien af π . Paa
 denne majsammeltge Maade fandt Ludolph von
 Ceulen $\pi \approx 3,141592,653589,793238,46264$
 $3,383279,50$. hvilket er bekiendt under Navn
 af det Ludolphiske Talt.

Anm. 1. Archimedes fandt allerede Forholdet imel-
 lem Diameter og Periphærie som $7 : 22$, eller $\pi \approx$
 $3\frac{1}{7} \approx 3,142$. . og altsaa allerede ved det 3de De-
 cimaltjiffer for stort. Ptolemæ fandt Forholdet imel-
 lem Diameter og Periphærie $\approx 113 : 355 \approx 1 :$
 $3,1415929$ og altsaa først ved det 8de Decimaltjiffer
 for stort.

Anm. 2. Siden har man ved Hjælp af den høiere
 Mathematikk fundet det Ludolphiske Talt langt videre
 udmættet.

nemlig Sherwin til 72; Machin til 110 og Lagny til 127 Decimaler.

Num. 3. Sandſke nœiagtig har endnu ingen fundet finde Diameterens Forhold til Peripherien (og det vil rimeligt aldrig funde findes) thi alle de angivne af Ludolph, og de øvrige fundne Tall give Cirkellinien ſtedſe noget lidet mindre end den virkelig er, da de egentlig angive Perimeteren af en indſkreven Polygon med overmaade mange Sider. Imidlertid er Fejlen naar antages $\pi = 3,1415$ allerede mindre end $\frac{1}{1000}$ af Diameteren, og ved det Ludolphiſke Tal ikke engang $\frac{1}{10}$ af en Qvintilliondeel. Men ved det Lagnyſke ikke $\frac{1}{10}$ af en 21 Trilliondeel af Diameteren. Til en Cirkellintes vilkælige Beregning i Længdemaal behøver man altsaa ikke engang hele det Ludolphiſke Tal, men man tager ſumſaa mange Decimaler, ſom Regningens Nœiagtighed udfordrer. Imidlertid tjener det til at prøve Rigtigheden af de Forhold, ſom de der vilde finde Cirkelns Quadratur angive at have fundet, og ſom ſædvanlig i de førſte Decimaler beſindes urigtige.

§. 105.

Opgave: At finde en Cirkels Peripherie p i retlinet Maal og dens Overflade a i Quadratmaal naar dens Diameter d er given.

Oploſn. Den givne Diameter d multipliceres med π , ſaa findes Peripherien $p = \pi d$; denne fundne Peripherie multipliceres igien med den halve Radius eller Hverdedelen af Diametren

saa findes Overfladen $a = p \times \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} p r$
 eller $= p \times \frac{1}{4} d = \frac{1}{4} d p$.

Bevijs: Efter §. 104. Till. 1. er naar Diameteren er 1 Peripherien $= \pi$ altsaa maa følgende Forhold finde Sted $1 : \pi = d : p$ og $p = \frac{\pi d}{1} = d \pi$. Cirkelfluden a er liig Fladen af en-Triangel (§. 53. Till. 2.) hvor Grundlinien AB (Fig. 38.) er Peripherien i retlinet Maal p og Hviden saa stor som Radius r . Men denne Triangelflade beregnes ved at multiplicere Grundlinien p med den halve Hvide $\frac{1}{2} r$ (§. 98.) altsaa Cirkelfluden $a = p \times \frac{1}{2} r = \frac{1}{2} p r$, men da $d = 2 r$ saa er $\frac{1}{2} d = r$, og $\frac{1}{4} d = \frac{1}{2} r$ selvgelig $\frac{1}{2} p r = \frac{1}{4} d p$.

Anm. At rectificere en krum Linie er at trække en ret Linie, som er ligesaa lang; en Cirkellinie kan altsaa rectificeres naar dens Længde paa anførte Maade i retlinet Maal bestemmes.

Till. 1. Er Overfladen af en Cirkel $a = \frac{1}{4} d p$ og $p = d \pi$ saa er $a = \frac{1}{4} d \times d \pi = \frac{1}{4} d^2 \pi = \frac{d^2 \pi}{4} = d^2 \times \frac{1}{4} \pi = 0,785398 d^2$.

Da $d = 2 r$ saa er $p = 2 r \pi$ altsaa $a = 2 r \pi \times \frac{1}{2} r = r^2 \pi$.

Ell. 2. Indholden af Ringen mellem to koncentriske Cirkler (Fig. 36.) hvis Radier CB og CG er $\equiv (CB^2 - CG^2) \times \pi$ thi den store Cirkelflade er $\equiv CB^2 \times \pi$; den mindre $CG^2 \times \pi$, altsaa deres Differens (som er Fladen af Ringen) $\equiv CB^2 \times \pi - CG^2 \times \pi \equiv (CB^2 - CG^2) \times \pi$.

Ell. 3. Er $p \equiv a\pi$ saa er $a \equiv \frac{p}{\pi}$
 a: Diameteren findes til en Cirkel naar Peripherien er givet i Længdemaal ved at dividere den med π . og naar $a \equiv r^2\pi$ saa er $r^2 \equiv \frac{a}{\pi}$ og $r \equiv \sqrt{\frac{a}{\pi}}$ b: naar Overfladen er givet i Kvadratmaal findes Radius til en Cirkel, naar Overfladen divideres med π og af den fundne Quotient udtrækkes Kvadratroden.

§. 106.

Opgave: At bestemme Længden af en Cirkelbue paa 1 Grad, 1 Minut og 1 Sekund i en given Mantel med Diameter $d \equiv 1$.

Oplosn. Den fundne (§. 104. Ell. 1.) Peripherie i Længdemaal (π) som svarer til Diameter $d \equiv 1$ divideres med 360 saa har man Længden af een Grad; denne Længde divideres med

med 60 giver Længden af een Minut, og denne
 igien med 60 Længden af een Sekund i retlinet
 Maal. Saaledes er i Decimalkraft

$$1 \text{ Grad} = 0,008726646250$$

$$1 \text{ Minut} = 0,000145444104$$

$$1 \text{ Sekund} = 0,000002424068 \text{ af Diams-
 terne.}$$

Bevijs: Er efter §. 104. Till. 1. $\pi = 360^\circ$
 naar $d = 1$ saa da $p = 360^\circ$ sa følger at

$$360^\circ = \pi \text{ og } 1^\circ = \frac{\pi}{360}. \text{ Er frendeles } 1^\circ$$

$$= 60' \text{ saa er } 1' = \frac{1^\circ}{60} = \frac{\pi}{360 : 60}$$

$$\frac{\pi}{360 \times 60} \text{ o. s. v.}$$

Till. 1. Heraf jeder enhver Bue given i
 Grader som AEB (Fig. 29.) sig sammensætte;
 og naar den multipliceres med den givne Diams-
 ter, har man dens Længde i samme Maal, hvori
 Diameteren var givet, Buen værs f. Ex. 49° , $28'$,
 $13''$ og Diameteren $= 8'$, saa er naar Dia-
 meteren værs $= 1$.

$$49^\circ = 0,42728$$

$$28' = 0,00406$$

$$13'' = 0,0000312$$

$$49^\circ, 28', 13'' = 0,43137 \text{ multipliceres}$$

nu dette med Diameter $\equiv 8$
 saa er $\frac{3,45096}{8}$ Længden af
 Buen i Godmaal.

Till. 2. Da enhver Sektor eller Udsnit
 kan ansees som en Triangel hvis Grundlinje er
 Buen og hvis Høide er Radius, saa findes Flade-
 indholdet af enhver Sektor som $ACBE$ (Fig.
 29.) naar den rectificerede Bue AEB multiplicer-
 es med den halve Radius.

Till. 3. Har man saaledes beregnet Ind-
 holden af Udsnittet $ACBE$; og derefter bereg-
 ner Indholdet af Trianglen ACB (§. 98.) og
 subtraherer det fra Indholdet af Udsnittet; saa fin-
 des Fladeindholdet af Segmentet $ADBE$.

§. 107.

Lætesæt. Enhver paa Hypothenusen af
 en retvinklet Triangel ABC (Fig. 32.) beskrev-
 den retlinet Figur ABF er saa stor som de to
 med den ligedanne paa Catheterne beskrevne Fi-
 gurer AEC og BCD tilsammmentagne.

Bevis: $\triangle AEC \sim \triangle CBD$ altsaa er

$$AEC : CBD = ACq : CBq \text{ (§. 98.)}$$

$$\text{følgelig: } (AEC + CBD) : CBD = (ACq + CBq) : CBq \text{ (Arithm §. 73.)}$$

$$(AEC + CBD) : CBD = ABq : CBq \text{ (§. 38.)}$$

frem-

fremdeles er $ABF : CBD = ABq : CBq$
(§. 91.)

altsaa $ABF : CBD = (AEC + CBD) : CBD$

men $CBD = CBD$

følgelig $ABF = AEC + CBD$

Anm. Det her for Triangle førte Beviis gælder for alle ligedanne Figurer; altsaa ogsaa for Cirkler.

Lill. 1. Beskrives paa de tre Sider af en retvinklet Triangel ACB (Fig. 37.) halve Cirkler; saa ere de to mellem Cirkelbuerne indsluttede Stykker (som kaldes Halvmaaner, Lunulæ) p og o saa store som den retvinklede Triangel; thi naar Segmenterne $n + m$ tages fra Halvcirklen paa Hypothenusen bliver den retvinklede Triangel tilbage; og tages de fra Halvcirklerne paa Catheterne blive Lunulæ tilbage.

Lill. 2. To givne ligedanne Figurer forvandles til en ligesaastor og ligedan; naar en retvinklet Triangel tegnes hvori to eenslaende Sider af de givne Figurer ere Catheter; og paa dens Hypothenuse tegnes en ligedan Figur.

§. 108.

Opgave: At forvandle en given Rectangel (Fig. 30.) til en Kvadrat.

Løsning.

Opløst. Mellem Rectanglens Breddelinie AB og Høide BC søges en Mellemproportionalinie (§. 76.) BG som er Siden til den foresatte Quadrats.

Beviis: Er $AB : BG = BG : BC$ saa er Rectanglen $ABCD =$ Quadraten $IBGH$ (§. 89. Till. 2.).

Till. Enhver given mangekanted Figur $ABCDE$ (Fig. 34.) forvandles til en Quadrats naar den inddeles i Triangler, disse forvandles til (§. 36. 2 Till.) en eeneste Rectangel, og denne til en Quadrats.

Erindring.

Læserne bedes ikke at lade denne Deel indbinde men kun hæfte; da nogle saa hertil behørende Figurer findes paa en Rodbertavle; som friges med anden Deel, da denne første Deel udgives særskildt meest for de Skolers Skyld, hvor den allerede bruges. Den anden Deel, der indeholder Algebra, Stereometrie og plan Trigonometrie, samt de allerførste Grunde af sphaerisk Trigonometrie og en meget kort Theorie om Arealberegning; vil blive omtrent af samme Størrelse som denne, og udkommer udsatpaaflig i denne Sommer, da Ervfningen udsatpaaflig fortsættes: Begge Deele der saaledes vel udgaaere omtrent halvandet Alphabet ind i da beqvemt indbinde samlede.

2 n d e n D e e l

1930 10 10 10 10 10 10 10

И г е б р а.

9 d 7 1/2 1/2 1/2

Yidere Udførelse af Regning med almindelige Tegn eller Bogstaver.

(See 1 Deel §. 46.)

Om Brøtregning med Bogstaver.

§. 1.

Da Bogstaver ere almindelige Tegn hørved alle Arter af Størrelser kan betegnes og en Brøt (Arithmetik §. 29) ikke er andet end een eller flere Dele af en vis som Eenhed betragtet Størrelse, der udtrykkes ved Tæller og Nævner; saa følger at Udtrykkene $\frac{a}{b}$, $\frac{m}{n}$, kan betegne enhver Brøt i Almindelighed; og da Regningen med disse algebraiske eller Bogstav-Brøt skeer efter samme Regler, som i Arithmetiken om Talbrøt ere givne (fra hvilke de ogsaa kun i Udtrykket ere forskiellige) vil enhver der har lært at regne Talbrøt og tillige forstaaer hvad om hele algebraiske eller Bogstav-Stør-

relser er foredraget (i D. §. 46) ogsaa uden videre Anvisning vide at behandle disse Brøst. Dog vil jeg for større Tydeligheds Skyld og til Øvelse fremsætte nogle Exempler paa de med Brøst sædvanlig forekommende Tilfælde; hvorved tillige de i Arithmetiken givne Regler paa det almindeligste kan oplyses og bevises.

§. 2.

Bogstav-Brøst kan som Tal-Brøst (Nr. §. 31) forforktes, det er udtrykkes med færre Bogstaver naar Tæller og Nævner divideres med samme Bogstav f. Ex. $\frac{am}{bm}$ forforktes ved at dividere med m og

bliver da $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$. Saaledes er og $\frac{mxy}{zmy} =$

$\frac{x}{z}$ thi opløst er $\frac{mxy}{zmy} = \frac{m \times x \times y}{m \times z \times y}$ naar nu de fæl-

les Factorer udslættes i Tæller og Nævner (hvilket er det samme som at dividere Tæller og Nævner med samme Størrelser) bliver Brøken $\frac{x}{z}$. Brøken $\frac{x+y}{x}$

kan derimod ikke saaledes forforktes; den vilde maaskee ved første Øiekast kunde synes for en Udvet at skulde være $= y$. (hvilket vilde været Tilfældet om

der stod $\frac{xy}{x}$) men $\frac{x+y}{x}$ er $= \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$.

Ved Brøken $\frac{mx}{my}$ skal aldeles ingen Forkortning findes

de Sted, da Tæller og Nævner som begge ere sammensatte Størrelser ingen fælles Factorer have.

Ann. Ved flere Exempler at øve Begynderne i disse og lignende Forandringer med Bogstav-Brøst, overlades til det mundtlige Foredrag.

§. 3.

Bogstav-Brøst adderes og subtraheres efterat de ere bragte til eens Benævning (Nr. §. 32) ved at addere og subtrahere deres Tællere ligesom Tal-Brøst (Nr. §. 33).

$$\begin{aligned} \text{Ex. 1)} \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} &= \frac{adf}{bdf} + \frac{bcf}{bdf} + \frac{bde}{bdf} \\ &= \frac{adf + bcf + bde}{bdf} \end{aligned}$$

Andertiden gives hele Størrelser Brøst Form, og bringes til samme Benævning ligesom Brøst for at forkorte Udtrykket.

$$\begin{aligned} \text{Ex. 2)} \quad m + \frac{n}{x} &= \frac{m}{1} + \frac{n}{x} = \frac{mx}{x} + \frac{n}{x} \\ &= \frac{mx + n}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ex. 3)} \quad \text{at addere: } \left(b + \frac{c}{d}\right) + \left(f - \frac{q}{p}\right) + \\ \left(g + \frac{e}{p}\right) \text{ er } &= \frac{bd+c}{d} + \frac{fp-q}{p} + \frac{gp+e}{p} = \\ & \quad \text{N 2} \quad \quad \quad bdpp \end{aligned}$$

Opløst. Mellem Rectanglens Grundlinie AB og Høide BC søges en Mellemproportionalitet (§. 76.) BG som er Siden til den forlængte Quadrant.

Bevis: Er $AB : BG :: BG : BC$ saa er Rectanglen $ABCD ::$ Quadranten $IBGH$ (§. 89. Till. 2.).

III. Enhver given mangeskanted Figur $ABCDE$ (Fig. 34.) forvandles til en Quadrant naar den inddeles i Triangler, disse forvandles til (§. 36. 2 Till.) en eneste Rectangel, og denne til en Quadrant.

Erindring.

Læserne bedes ikke at lade denne Deel indbinde men kun hæfte; da nogle, saa hertil behørende Figurer findes paa en Rodhertavle, som friges med anden Deel, da denne første Deel udgives særskildt meest for de Skolers Skyld, hvor den allerede bruges. Den anden Deel, der indeholder Algebra, Stereometrie og plan Trigonometrie, samt de allerførste Grunde af sphaerisk Trigonometrie og en meget kort Theorie om Regelmæssighed; vil blive omtrent af samme Betydelse som denne, og udkommer uadskillelig i denne Sommer, da Trykningen herved fortsættes: begge Deele der saaledes vel udgaa omtrent halvandet Alphabet mere, da beqvemt indbinde samlede.

A n d e n D e e l

1930 10 10 11 12 13 14 15

श्री गेबरा.

... y d 7 1 1 1 1 1

Widere Udførelse af Regning med almindelige Tegn eller Bogstaver.

(See 1 Deel §. 46.)

Om Brøkrekning med Bogstaver.

§. 1.

Da Bogstaver ere almindelige Tegn hvorved alle Arter af Størrelser kan betegnes og en Brøk (Arithmetik §. 29) ikke er andet end een eller flere Dele af en vis som Eenhed betragtet Størrelse, der udtrykkes ved Tæller og Nævner; saa følger at Udtrykkene $\frac{a}{b}$, $\frac{m}{n}$, kan betegne enhver Brøk i Almindelighed; og da Regningen med disse algebraiske eller Bogstav-Brøke skeer efter samme Regler, som i Arithmetiken om Talbrøke ere givne (fra hvilke de ogsaa kun i Udtrykket ere forskiellige) vil enhver der har lært at regne Talbrøke og tillige forstaaer hvad om hele algebraiske eller Bogstav-Stør-

relser er foredraget (1 D. §. 46) ogsaa uden videre Anvisning vide at behandle disse Brøst. Dog vil jeg for større Tydeligheds Skyld og til Øvelse fremsætte nogle Exempler paa de med Brøst sædvanlig forekommende Tilfælde; hvorved tillige de i Arithmetiken givne Regler paa det almindeligste kan oplyses og bevises.

§. 2.

Bogstav-Brøst kan som Tal-Brøst (Nr. §. 31) forkortes, det er udtrykkes med færre Bogstaver naar Tæller og Nævner divideres med samme Bogstav f. Ex. $\frac{am}{bm}$ forkortes ved at dividere med m og

bliver da $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$. Saaledes er og $\frac{mxy}{zmy} =$

$\frac{x}{z}$ thi opløst er $\frac{mxy}{zmy} = \frac{m \times x \times y}{m \times z \times y}$ naar nu de fæl-

les Factorer udslættes i Tæller og Nævner (hvilket er det samme som at dividere Tæller og Nævner med samme Størrelser) bliver Brøken $\frac{x}{z}$. Brøken $\frac{x+y}{x}$

kan derimod ikke saaledes forkortes; den vilde maa ske ved første Øiekast kunde synes for en Uøret at skulde være $= y$ (hvilket vilde været Tilfældet om

der stod $\frac{xy}{x}$) men $\frac{x+y}{x}$ er $= \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$.

$$\frac{bdpp + cpp}{dpp} + \frac{dfpp - dpq}{dpp} + \frac{dgpp + cdp}{dpp} =$$

$$\frac{bdpp + cpp + dfpp - dpq + dgpp + cdp}{dpp}$$

og da den Factor p findes i ethvert Led af Tæller
 ren og tillige i Nævneren, saa kan Brøken forkor-
 tes (§. 2) ved at dividere Tæller og Nævner med
 p , og bliver da $= \frac{bdp + cp + dfp - dq + dgp + cd}{dp}$

$$= b + f + g + \frac{cp - dq + cd}{dp}.$$

Ex. paa Subtraktion: 1) $\frac{a}{m} - \frac{c}{p} = \frac{ap}{mp} -$

$$\frac{cm}{mp} = \frac{ap - cm}{mp}.$$

$$2) \frac{ab}{f} - \frac{gh}{k} = \frac{abk}{fk} - \frac{fgh}{fk} = \frac{abk - fgh}{fk}.$$

$$3) \text{ Fra } \frac{a+c}{b+d} \text{ at subtrahere } a + \frac{d}{p} = \frac{ap+d}{p}$$

$$= \frac{a+c}{b+d} - \frac{ap+d}{p} = \frac{ap+cp}{bp+dp} - \left(\frac{abp+bd}{bp} \right.$$

$$\left. + \frac{adp+dd}{dp} \right) = \frac{ap+cp-abp-bd-adp-dd}{bp+dp}.$$

§. 4.

Algebraiske Brøf multipliceres med hinanden ligesom simple Brøf, naar Tæller multipliceres med Tæller og Nævner med Nævner (Arith. §. 35).

1 Ex. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ et almindeligt Bevis fun-

de føres saaledes, sæt $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$, saa

er (Ar. §. 38) $a = bm$, $c = dn$ og $ac = bm$

$\times dn = bdmn$; altsaa $\frac{ac}{bd} = \frac{bdmn}{bd} = mn$; men

$m \text{ var. } = \frac{a}{b}$ og $n = \frac{c}{d}$, folgelig $mn = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$.

Anm. Dette Bevis vil maaskee for Begyndere synes fremmet, men vil let af Læreren kunde oplyses, da det ikke er andet end en Anvendelse af de i Arithm. anførte Grundsætninger.

2 Ex. $\frac{ab-d}{c} \times \frac{de-f}{g} = \frac{(ab-d) \times (de-f)}{cg}$
 $= \frac{abde-dde-abf+fd}{cg}$.

§. 5.

En algebraisk Brøf divideres med en anden, naar Divisors Tæller og Nævner omsættes (inverteres) og Dividenden dermed multipliceres.

Ex. 1) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Almind.

Almindeligt Beviis: sæt $\frac{a}{b} = m$; $\frac{c}{d} = n$.

$$\text{saar er } a = bm$$

$$c = dn$$

$$\text{og } \frac{a}{c} = \frac{bm}{dn}$$

Multipliceer med d saar er $\frac{ad}{c} = \frac{bm}{n}$ (Arith. §. 30).

Dividerer med b saar er $\frac{ad}{bc} = \frac{m}{n}$ (Arith. §. 30) og

$$\text{saaledes } \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}.$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \frac{abd}{cf} : \frac{ab}{c} &= \frac{abd}{cf} \times \frac{c}{ab} = \frac{abd}{abcf} \\ &= -\frac{d}{f} \quad (\S. 2). \end{aligned}$$

§. 6.

Enhver Brøk kan ansees som en Quotient, hvor Dividenden er Tæller og Divisor Nævner; ligesom og i det Tilfælde, at der ved Divisionen bliver noget tilovers der ikke videre lader sig dividere (Arith. §. 46), da udtrykkes det som Brøk. I det Tilfælde at Tælleren i en saadan Brøk eller Dividenden er en enkelt algebræisk Størrelse, og Nævneren eller Divisor en sammensat, kan Brøks Værdie eller Quotienten ikke udtrykkes paa anden

anden Maade end ved en uendelig Tal Række. For
uden det i Arithm. §. 46 herpaa anførte Exempel,
vil jeg her endnu for den Anvendelse deraf i det
følgende kan gøres, anføre et Par Exempler.

$$\text{Saaledes er } \frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{cb}{aa} + \frac{cbb}{aaa} -$$

$$\frac{cbbb}{aaaa} + \frac{cbbbbb}{aaaaa} \text{ o. s. f.}$$

Divisionen seer saaledes ud:

| Divisor | Dividenten | Quotienten |
|---------|---|--|
| $a + b$ | c | $\left(\frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{aaa} - \frac{bbbc}{aaaa} \right)$ |
| | $c + \frac{bc}{a}$ | |
| | $\frac{bc}{a}$ | |
| | $bc + \frac{bbc}{aa}$ | |
| | $\frac{bbc}{aa} + \frac{bbbc}{aaa}$ | |
| | $\frac{bbbc}{aaa}$ | |
| | $\frac{bbbc}{aaa} + \frac{bbbbc}{aaaa}$ | |
| | $\frac{bbbbc}{aaaa}$ | |
| | $\frac{bbbbc}{aaaa} + \frac{bbbbbc}{aaaaa}$ | |
| | $\frac{bbbbbc}{aaaaa}$ | |

og ved at vedblive vilde man finde den ovenanførte Quotient, der ogsaa kunde udtrykkes saaledes (Arithm. §. 40.)

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{cb}{a^2} + \frac{cb^2}{a^3} - \frac{cb^3}{a^4} + \frac{cb^4}{a^5} \text{ o. s. v.}$$

Da c findes i alle Quotientens Tællere som Factor, saa kan Quotienten ogsaa forkortet udtrykkes paa denne Maade:

$$\frac{c}{a+b} = c \times \left(\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} \right).$$

Udm. I den anførte Rad afveksle Tegnene $+$ og $-$ som vil skee naar begge Divisors Led have samme Tegn som Dividenden: tages derimod i Divisor det ene Led nægtende som $a - b$, da vilde alle Ledene i Raden blive bekræftende, og Exemplet blive saadant:

$$\frac{c}{a-b} = \frac{c}{a} + \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{aaa} + \frac{bbbc}{aaaa} \text{ o. s. v.}$$

$$\text{eller } \frac{a-b}{c} = \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{b^3}{a^4}$$

o. s. v.)

§. 7.

Vil man anvende denne almindelige Form paa mere enkelte Tilfælde, da sætter man i Stedet for de almindelige Tegn bestemte Værdier.

Lad

Lad være f. Ex. $c = 1$, og Raden bliver da efter

Formen fra $\frac{c}{a+b}$ saaledes

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \infty.$$

Lægges den i forrige § nævnte Form $\frac{a}{a-b}$ til

Grund, og man tage $a = 1$, $b = 1$, saa faae

$$\text{man } \frac{c}{1-1} = \frac{c}{0} = c + c + c + c + c + \infty.$$

$\therefore \frac{c}{0}$ giver en Quotient som bestaaer af c uendelig

mange Gange igjentaget \therefore en uendelig stor Størrelse (som allerede er anmærket §. 25 Arithm.) og

som plejer at betegnes saaledes $\frac{c}{0} = \infty$.

Enhver Tal-Brøk kan ogsaa efter en af disse Former udtrykkes ved en uendelig Rad

$$\text{f. Ex. } \frac{1}{5} = \frac{1}{3+2} \text{ her er } c=1, a=3, b=2,$$

$$\text{altsaa } \frac{1}{3+2} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{4}{27} - \frac{8}{81} + \frac{16}{243}$$

man seer let at naar man i denne Rad standser med et bekræftende Led og summerer Raden, da faaer man en Værdi større end den givne Brøk; er derimod det sidste Led nægtende faaer man Værdien

den mindre end Brøken, men Differencen imellem den fundne og sande er stedse mindre, og først naar Raden bliver uendelig vil dens Summa netop udgiøre $\frac{1}{2}$.

En saadan Rad der stedse nærmer sig til den sande Værdi, kaldes en convergerende Rad, som stedse beholdes efter Formen $\frac{c}{a+b}$, naar det første Led i Divisor er større end det andet. $a > b$.

Vilde man derimod efter samme Form sætte $a < b$ og sætte $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+4}$ da vilde vi faae en

Divergerende Rad, der stedse viger mere af fra den sande Værdi, den anførte Brøk $\frac{1}{2}$ vilde da

$$\text{blive } \frac{1}{1+4} = 1 - 4 + 16 - 64 + 256 - 1024 \text{ ic.}$$

Anm. Det indsees let at jo større a er mod b i de anførte Exempler, desto hastigere convergerer Raden, og man kan lade sig nøie med faa Led uden at begaae nogen mærkelig Feil.

Om Potenser, Rodstørrelser og deres Forandringer.

§. 8.

I Almindelighed forstaaes ved en Potens eller Værdighed (dignitas) et Produkt af ligestore Fakt.

Faktorer (Arith. §. 52) og den som Faktor brugte Størrelse kaldes Potensens Rod. Det øverst ved høire Side af Roden satte Tal kaldes Potensens Exponent, og tilkiendegiver hvor mange enkelte Faktorer der ere multiplicerede med hinanden; eller hvad Potens det er, f. Ex. $a^3 = aaa$ er den 3die Potens af a der er Potensens Rod og 3 er Exponenten. $8^3 = 512 = 8 \times 8 \times 8$ den tredje Potens af 8 som er Potensens Rod, og i Almindelighed betegner a^n at a skal multipliceres n Gange med sig selv. Enhver Rod tilkiendegives ved det i Arithmetiken (§. 52) ved Kvadratroden anførte Tegn, og ved et Tal eller Bøgstav som sættes i Tegnet og kaldes Rod-Exponent tilkiendes

gives hvad Rod der søges, f. Ex. $\sqrt[6]{64}$ betegner at der søges et Tal som ophøiet til fjerde Potens er 64 hvilket er 2, thi $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ naar den anden Rod skal tilkiendegives, sættes ingen Rod-Exponent (Arith. §. 52). Er Størrelsen for hvilken Rodtegnet sættes sammensat, da ind-

sluttes den i en Parenthes, f. Ex. $\sqrt[4]{(ab+c)}$ betyder at til Produktet ab skal adderes c og af Summen søges den femte Rod, det kunde og skrives

saaledes: $\sqrt[4]{ab+c}$. $\sqrt[4]{(a+m+(a+b)c)} = \sqrt[4]{(a+m+ac+bc)}$, kan og staae saaledes:

$$\sqrt[4]{a+m+a+b \times c} = \sqrt[4]{a+m+ac+bc}.$$

den mindre end Brøken, men Differencen imellem den fundne og sande er stedse mindre, og først naar Raden bliver uendelig vil dens Summa netop udgiøre $\frac{1}{5}$.

En saadan Rad der stedse nærmer sig til den sande Værdi, kaldes en convergerende Rad, som stedse erholdes efter Formen $\frac{c}{a+b}$, naar det første Led i Divisor er større end det andet, $a > b$.

Vilde man derimod efter samme Form sætte $a < b$ og sætte $\frac{1}{5} = \frac{1}{1+4}$ da vilde vi faae en

Divergerende Rad, der stedse viger mere af fra den sande Værdie, den anførte Brøk $\frac{1}{5}$ vilde da

$$\text{blive } \frac{1}{1+4} = 1 - 4 + 16 - 64 + 256 - 1024 \text{ ic.}$$

Anm. Det indsees let at jo større a er mod b i de anførte Exempler, desto hastigere convergerer Raden, og man kan lade sig nøie med faa Led uden at begaae nogen mærkelig Feil.

Om Potenser, Rodstørrelser og deres Forandringer.

§. 8.

I Almindelighed forstaaes ved en Potens eller Værdighed (dignitas) et Produkt af ligestore Fakt.

Faktorer (Arith. §. 52) og den som Faktor brugte Størrelse kaldes Potensens Rod. Det øverst ved høire Side af Roden satte Tal kaldes Potensens Exponent, og tilkiendegiver hvor mange enkelte Faktorer der ere multiplicerede med hinanden; eller hvad Potens det er, f. Ex. $a^3 = aaa$ er den 3die Potens af a der er Potensens Rod og 3 er Exponenten. $8^3 = 512 = 8 \times 8 \times 8$ den tredje Potens af 8 som er Potensens Rod, og i Almindelighed betegner a^n at a skal multipliceres n Gange med sig selv. Enhver Rod tilkiendegives ved det i Arithmetiken (§. 52) ved Kvadratroden anførte Tegn, og ved et Tal eller Bøgstav som sættes i Tegnet og kaldes Rod-Exponent tilkiendes

gives hvad Rod der søges, f. Ex. $\sqrt[6]{64}$ betegner at der søges et Tal som ophøiet til fjerde Potens er 64 hvilket er 2, thi $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ naar den anden Rod skal tilkiendegives, sættes ingen Rod-Exponent (Arith. §. 52). Er Størrelsen for hvilken Rodtegnet sættes sammensat, da ind-

sluttes den i en Parenthes, f. Ex. $\sqrt[4]{(ab+c)}$ betyder at til Produktet ab skal adderes c og af Summen søges den fjerde Rod, det kunde og skrives

saaledes: $\sqrt[4]{ab+c}$. $\sqrt[4]{(a+m+(a+b)c)} = \sqrt[4]{(a+m+ac+bc)}$, kan og staae saaledes:

$$\sqrt[4]{a+m+a+b \times c} = \sqrt[4]{a+m+ac+bc}.$$

§. 9.

Addition og Subtraction med Potenser skeer efter samme Regler som i Arithmetiken (§. 41 og 42) ere forklarede; naar de have samme Røder og samme Exponenter ansees de som ligeartede Størrelser, og saavel Additionen som Subtractionen kan vdfælgelig foretages. Ere derimod Rødderne forskiellige, om end Exponenterne ere de samme, eller Exponenterne forskiellige naar Rødderne ere de samme, da ere de uligeartede Størrelser, og de nævnte Regnings-Arter kan allene skee ved Hielp af Tegn.

1 Exemp. $2a^5 + 4a^5 = 6a^5$; $7a^2 - 3a^2 = 4a^2$.

at addere $\left\{ \begin{array}{l} a^3 - 3b^4 + 5c^6 - 3g^7 \\ -2a^3 + b^4 - 2c^6 + 3h^7 - 3g^6 \end{array} \right.$

Summa $= -a^3 - 2b^4 + 3c^6 - 3g^7 + 3h^7 - 3g^6$

2 Exempel.

at subtrahere $\left\{ \begin{array}{l} 4x^2 - y^5 + z^4 - u^2 \\ 2x^2 - y^5 - z^4 + u^3 \\ - \quad + \quad + \quad - \end{array} \right.$

Differencen $2x^2 - 2y^5 + 9z^4 - 5u^2 - 4u^3$

§. 10.

Potenser af samme Rod multipliceres med hinanden naar deres Exponenter adderes;

Pro.

Produktet bliver saaledes en Potens, hvis Exponent er Summen af Factorernes Exponenter.

Bevijs: $a^2 \times a^3 = aa \times aaa = aaaaa$
(Arithm. §. 44) $a^5 = a^{3+2}$.

Anm. Tre Potenserne af forskjellige Røder, kan Multiplicationen allene tilfjendegives ved Tegn eller efter Bedtægt at skrive dem umiddelbar ved hinanden, f. Ex. $a^3 \times b^2 = a^3 b^2$.

Exempel paa Multiplication med sammensatte Størrelser:

$$\begin{array}{r}
 2a^3 + 3b^3 \\
 2a^2 + 3b^3 \\
 \hline
 4a^4 + 6a^2b^3 \\
 \quad 6a^2b^3 + 9b^6 \\
 \hline
 4a^4 + 12a^2b^3 + 9b^6 \text{ (conf. Nr. §. 44 No. 2)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 - y^3 + 4y^5 \\
 \quad - 3y^2 \\
 \hline
 -3y^2x^2 + 3y^5 - 12y^7
 \end{array}$$

§. II.

Division med Potenser af samme Rod Heer, naar Divisors Exponent subtraheres fra Dividendi Exponent; da Forskiellen er Quotientens Exponent. Ex. $a^5 : a^3 = a^2$.

Beviis: $a^5 \equiv aaaaa$; $a^3 \equiv aaa$, altsaa
 $a^5 : a^3 \equiv aaaaa : aaa \equiv \frac{aaaaa}{aaa} \equiv aa \equiv a^2$
 (Arithm. §. 45).

Ere Potensernes Rødder forskellige, da til-
 fiendegives Divisionen allene ved Tegne

Ex. $a^5 : b^2 \equiv \frac{a^5}{b^2}$.

Naar dette iagttages meer Divisionen med
 sammensatte Størrelser, der indeholde flere Po-
 tenser saavel af samme som af forskjellig Rod, li-
 gesom om Bogstaver er forklaret (Arithm. §. 46).

| Divisor | Dividenden | Quotienten |
|---------------|---|-----------------------|
| $2a^3 + 3b^5$ | $4a^6 + 12a^3b^5 + 9b^{10} + 2a^2c^4 + 3b^5c^4$ | $(+2a^3 + 3b^5 + c^4$ |
| | $4a^6 + 6a^3b^5$ | |
| | $6a^3b^5 + 9b^{10}$ | |
| | $6a^3b^5 + 9b^{10}$ | |
| | $2a^2c^4 + 3b^5c^4$ | |
| | $2a^2c^4 + 3b^5c^4$ | |

Tillæg 1) Skal nu a^3 divideres med a^2
 bliver Quotienten a^1 som er det samme som a , thi

$a^3 \equiv aaa$ og $a^2 \equiv aa$, altsaa $\frac{a^3}{a^2} \equiv a^1$, det

samme som $\frac{aaa}{aa} \equiv a$. Enhver Størrelse er altsaa

den første Potens af sig selv, og Exponenten behøves ikke at skrives.

Tillæg 2) Hæve Dividenden og Divisor samme Exponenter, bliver Quotientens Exponent 0, f. Ex. $a^3 : a^3 = a^0$, hvilket Udtryk (man sætte i Stæden for a hvad Størrelse man vil) er

$$\text{lige med } 1, \text{ thi } \frac{a^3}{a^3} = \frac{aaa}{aaa} = 1 \text{ (Arithm. §. 45)}$$

$$\text{saaledes er } x^0 = 1; 100^0 = 1.$$

Tillæg 3) Er Divisors Exponent større end Dividends, da bliver Quotientens Exponent nægtende (negativ), f. Ex. $a^3 : a^5 = a^{-2}$; $x^3 : x^4 = x^{-1}$. Enhver saadan Potens med

en negativ Exponent er ligegyldende med en Brøk, hvis Tæller er 1 og hvis Nævner er samme Potens med en positiv Exponent. Thi $x^3 : x^5 = x^{-2}$

$$\text{men } x^3 : x^5 \text{ er } = \frac{xxx}{xxxxx} = \frac{1}{x^2}, \text{ og saaledes}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2} \text{ (Arithm. §. 38. 4), og i Almindelighed}$$

$$\text{hæd } x^{-n} = \frac{1}{x^n}; 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}. \text{ Ligeledes}$$

$$\text{hæd } m^{-2} = m \times \frac{1}{m^2} = \frac{m}{m^2}.$$

Anm. Det er af megen Bigtighed at søge Begreberne vel i disse Sætninger; da det i algebræiske Regninger ofte er nødvendigt at sætte et saadant Udtryk i Stæden for et andet.

§. 12.

En given Potens ophøies til en bestemt højere Grad, naar dens Exponent multipliceres med Exponenten af den forlangte Grad.
 Ex. $(a^3)^4 = a^{12}$; $(2^3)^2 = 2^6$.

Beviis: $(a^3)^4 = a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3$
 $= a^{3+3+3+3}$ (§. 10) $= a^3 \times 4 = a^{12}$, saaledes

$$(x^m)^n = x^{mn}. \quad (x^{-4})^3 = x^{-12} = \frac{1}{x^{12}}$$

(§. 11).

§. 13.

En forlangt Potens af et givet Product findes ved at ophøie hver enkelt Faktor til den forlangte Potens, og multiplicere dem med hinanden; ligesledes findes Potensen af en Kvotient ved at ophøie Dividenden og Divisor hver for sig til den forlangte Potens.

$$\text{Ex. } (ab)^3 = a^3 b^3; (xy)^m = x^m y^m.$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}.$$

$$\text{Beviis: } (ab)^3 = ab \times ab \times ab = aaabbb \\ = a^3 b^3. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}.$$

Anm. Skal en Samling af flere Størrelser forenede med + eller - (ved Addition eller Subtraction) ophøies til en Potens, saa indslutter man dem

dem i en Parenthese, eller slaar en Linie over den hele Række, og sætter bag Parenthesen eller efter Linien Exponenten til den forlangte Potens, Ex.

$(a+b+c)^2$ eller $a+b+c^2$ betyder at Summen af a , b og c skal opøyses til 2den Potens, og er ikke $a^2+b^2+c^2$, men $a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2$ Arith. §. 55. 2 T.) $((a+b)^2+(c+b)^2)^2$ betyder 1) at $a+b$ skal kvadreres, 2) at $c+b$ skal kuberes, og at Summen af dette Kvadrat og denne Kubus skal opøyses til fjerde Potens.

§. 14.

En forlangt Rod udtrækkes af en given Potens; naar Potensens Exponent divideres med Rod-Exponenten. Ex. $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$.

Beviis: At uddrage den 3die Rod af a i flette Potens, er at finde en Størrelse som multipliceret 3 Gange med sig selv frembringer a i flette Potens, nu gives der ingen anden Størrelse end a^2 som opøysiet til 3 Potens, kan frembringe a^6 thi $(a^2)^3$

er $= a^6$ og i Almindelighed er $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

thi $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^n = x^{\frac{nm}{n}} = x^m$

eller saaledes (§. 12.) $x = x^1 = x^{\frac{m}{n}} =$

$$x^{\frac{1}{n} \times m} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

saaledes er nu

x opløst i m ligestore Factorer, hvoraf enhver er

$\sqrt[m]{x}$ som vi vil sætte $= y$, saa at $x = y \times y \times y$ &c.

Følgelig $\sqrt[m]{x} = y = x^{\frac{1}{m}}$; $\sqrt[m]{x^2} = y \times y$

$= x^{\frac{2}{m}}$ og i Almindelighed $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$.

Da m og n kan tillægges alle muelige Værdier, saa følger at m kan antages større end n eller ikke at kunde gaae op i n ; man faaer saaledes Potenser med Brøk-Exponenter, som ogsaa kaldes Brøk-

Potenser. S. Ex. $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Ogsaa er $(x^{\frac{1}{3}})^3 = x^2$. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (Arith. §. 44. Num. og §. 52, 2 Till.). Alle Rodstørrelser kan altsaa udtrykkes

som Brøk-Potenser, og denne Maade at betegne dem paa, bruges meget ofte. Imidlertid beholder man i mange Tilfælde hellere Rodtegnet, som ogsaa kort og tydelig viser hvad en Brøk-Potens egentlig betyder: nemlig at man af et Tal, op-
høiet til en Potens, hvis Exponent er Brøken's Tæller, skal uddrage en Rod, hvis Exponent er

Nævneren. S. Ex. $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$.

Tillæg 1) Heraf lader sig ulede mange Forandringer i de algebraiske Udtryk, som best. sees ved Exempler, saaledes er: $a^{\frac{1}{2}} = a^{2^{\frac{1}{2}}} = a^2 \times a^{\frac{1}{2}} =$

$a^2 \times \sqrt{a}$; $a^{\frac{1}{3}} = a^{3^{\frac{1}{3}}} = a^3 \times a^{\frac{1}{3}} = a^3 \times \sqrt[3]{a}$;

$a^{\frac{1}{4}} = a^{4^{\frac{1}{4}}} = a^4 \times a^{\frac{1}{4}}$.

Lige

Ligesaa $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}}$

sæt $a = 4$ saa er $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{4^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

videre er $\frac{a^2}{\sqrt{a^3}} = a^{\frac{2}{1}} \sqrt{a^{\frac{1}{3}}}$ thi $\frac{a^2}{\sqrt{a^3}} = a^2 \times$

$\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = a^2 \times a^{-\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = a \times a^{-\frac{1}{2}} = a \sqrt{a}.$

Tillæg 2) En Rodstørrelse bliver uforandret i sin Værdi, naar begge Exponenter (Potensens og Rodtegnet) multipliceres eller divideres med

et og samme Tal. Thi da $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n \times r}{m \times r}}$

(Arithm. §. 30. 4.) saa er $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \times r]{a^{n \times r}},$

og $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:r]{a^{n:r}}.$

Tillæg 3) I Følge heraf lader en Rodstørrelse sig bringe til en ringere Grad, naar begge Exponenterne (nemlig den i Rodtegnet og under

Rodtegnet) have en fælles Divisor f. Ex. $\sqrt[6]{a^8}$

$= \sqrt[6:2]{a^{8:2}} = \sqrt[3]{a^4}.$ Et Tal. Exempel $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{8^2}$
 $= \sqrt[2]{8}.$

§. 15.

To eller flere forskellige Rodstørrelser bringes under eens Bæmning (o: forandres

saaledes at de alle faae samme Rod-Exponent, eller at samme Rod skal uddrages af dem alle) 1) naar enhver Rod-Exponent multipliceres med Productet af de øvrige Rod-Exponenter, og 2) enhver Potens-Exponent under Rodtegnet multipliceres med de samme Tal eller Bogstaver hvormed Rod-Exponenten er multipliceret.

B. Ex. de givne Størrelser være $\sqrt[m]{x^n}$ og $\sqrt[s]{y^r}$ man faaer da $\sqrt[ms]{x^{ns}} = \sqrt[m]{x^n}$ og $\sqrt[ms]{x^{mr}} = \sqrt[s]{y^r}$ (§. 14.) Ligeledes være givne $\sqrt[m]{x^n}$, $\sqrt[p]{y^q}$, og $\sqrt[s]{z^r}$, saa er $\sqrt[mps]{x^{nps}} = \sqrt[m]{x^n}$ og $\sqrt[mps]{y^{mps}} = \sqrt[p]{y^q}$ ligeledes $\sqrt[mps]{z^{mpr}} = \sqrt[s]{z^r}$.

Rigtigheden i denne Fremgangsmaade indsees af §. 13. Till. 2.

Tillæg. Det samme skeer, ved at udtrykke Rodstørrelserne som Potenser med Brøst-Exponenter, bringe disse til eens Benævning (Arithm. §. 32.) og sætte derpaa den for dem alle fælles Rævner i Rodtegnet for dem alle. **B. Ex.** de givne Størrelser være $\sqrt[m]{x^n}$; $\sqrt[s]{y^r}$ saa er $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$;

$\sqrt[s]{y^r} = y^{\frac{r}{s}}$ Brøkene $\frac{n}{m}$ og $\frac{r}{s}$ bragte til eens

Benævning blive $\frac{ns}{ms}$ og $\frac{mr}{ms}$. Saaledes $x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{ns}{ms}}$

og $y^{\frac{r}{ms}} = y^{\frac{mr}{ms}}$ antrykkes nu disse Brøks-Exponenter ved Rodtegnet, saa er $x^{\frac{ns}{ms}} = \sqrt[ms]{x^{ns}} = \sqrt[m]{x^n}$; og $y^{\frac{mr}{ms}} = \sqrt[ms]{y^{mr}} = \sqrt[m]{y^r}$.

§. 16.

En forlangt Rod uddrages af et givet Produkt, ved at uddrage denne Rod af enhver Faktor og multiplicere disse Røder med hinanden, da dette Produkt er Roden af det givne Produkt; ligeledes af en given Quotient (Brøk) ved at uddrage den forlangte Rod af Dividenden og Divisor, og tage, disses Quotient.

$$\text{Ex. } \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}. \quad \sqrt[m]{xy} = \sqrt[m]{x} \times \sqrt[m]{y}. \quad \sqrt[4]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}. \quad \sqrt[m]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y}}.$$

Bevis. $\sqrt[3]{ab}$ maa være $= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ efterdi $(\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b})^3$ er $= ab$ (§. 12.) og

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \text{ de } \left(\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \right)^n \text{ er } = \frac{x}{y}.$$

Tillæg 1) En Rodstørrelse udtrykkes for-
tere, naar Størrelsen under Rodtegnet har en
eller flere Faktorer (eller og kan opløses i saadanne
Faktorer) der have samme Exponent som Rodteg-
net, da disse bringes foran Rodtegnet som Coeffi-
cienter.

$$\begin{aligned}\text{Ex. } \sqrt[n]{a^n b^m} &= \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b^m} = a \sqrt[n]{b^m}. \\ \sqrt[m]{a^m b^m c^n} &= \sqrt[m]{a^m} \times \sqrt[m]{b^m} \times \sqrt[m]{c^n} = a \\ &\times b \times \sqrt[m]{c^n} = ab \sqrt[m]{c^n}. \quad \sqrt{18} = \sqrt{9} \times 2 \\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}. \quad \sqrt{48} = \sqrt{4} \times \\ &12 = \sqrt{4} \times \sqrt{12} = 2\sqrt{12}.\end{aligned}$$

Tillæg 3) Bliver efter denne Forandring
under samme Rodtegn samme Størrelse tilbage
med forstørelse Coefficienter, saa forholde de irra-
tionale Rodstørrelser sig om deres rationale Coef-
ficienter.

$$\begin{aligned}\text{S. Ex } \sqrt{4} \times 11 : \sqrt{9} \times 11 &= 2\sqrt{11} : \\ 3\sqrt{11} &= 2 : 3. \quad \sqrt[n]{x^n y} : \sqrt[n]{z^n y} = x\sqrt[n]{y} : \\ z\sqrt[n]{y} &= x : z.\end{aligned}$$

Anm. En algebraisk rational Størrelse kal-
des den, som kan tilkiendegives og betegnes uden
Rodtegn eller ved en Exponent, som er en egentlig
Brøk; irrational derimod, naar den ikke uden
paa en af de nævnte Maader kan udtrykkes og dens
Værdi følgerig ikke nøie angives. (Arithm. §. 54.
Tillæg 1.)

Tillæg 3) Coefficienten ved en Rodstørrelse lader sig bringe under Rodtegnet; naar den ophøies til en Potens, der har samme Exponent som Rodtegnet. Ex. $3\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{3^3 \times 7} = \sqrt[3]{9 \times 7} = \sqrt[3]{63}$. $a\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^n \times b^m} = \sqrt[n]{a^n b^m}$.

§. 17.

Rodstørrelser adderes og subtraheres, naar de, efter at være forkortede saavidt muligt (§. 16. Till. 1.), have samme Rod-Exponent og samme Størrelse under Rodtegnet, og følgelig kan ansees som Ting af eens Art; ved at addere og subtrahere deres Coefficienter.

$$\text{Ex. } \sqrt[n]{x^nc} \pm \sqrt[n]{y^nc} = x\sqrt[n]{c} \pm y\sqrt[n]{c} = (x \pm y)\sqrt[n]{c}. \quad 3\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{4^3 \times 8} = 3\sqrt[3]{8} + 4\sqrt[3]{8} = 7\sqrt[3]{8}.$$

Till. Ere derimod Størrelser under Rodstegnene eller Rod Exponenterne forskjellige, da tilføiendes Additionen og Subtractionen allene ved Tegnet, som i følgende Exempler.

Ex. at
addere.

$$\sqrt{4a^2b + \sqrt{9a^2bc} + \sqrt{4x}} = 2a\sqrt{b} + 3a\sqrt{bc} + 2\sqrt{x} \quad (\text{h. 16. 511.})$$

$$\sqrt{16a^2b - \sqrt{a^2bc} - \sqrt{16x}} = 4a\sqrt{b} - a\sqrt{bc} - 4\sqrt{x}$$

Summen = $6a\sqrt{b} + 2b\sqrt{bc} - 2\sqrt{x}$

$$\sqrt{a + m\sqrt{n}}$$

$$2\sqrt{7} - 4\sqrt{4}$$

$$3\sqrt{7} - 5\sqrt{2}$$

$$5\sqrt{7} - 4\sqrt{4} - 5\sqrt{2}$$



at sub,
trahere.

$$3a\sqrt{bg} - 3c\sqrt{b^2} + 2\sqrt{b}$$

$$- 8a\sqrt{bg} + 7c\sqrt{b^2} + 5\sqrt{a}$$

$$13a\sqrt{bg} - 10c\sqrt{b^2} - 3\sqrt{a}$$

$$4\sqrt{ab} + 2\sqrt{a}$$

$$6\sqrt{ab} + 3\sqrt{a}$$

$$3\sqrt{5} + 3\sqrt{6}$$

$$9\sqrt{5} - 4\sqrt{4}$$

$$- 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{a} - 3\sqrt{a}$$

$$- 6\sqrt{5} + 3\sqrt{6} + 4\sqrt{4}$$

§. 12.

Rodstørrelser, der enten have, eller ere bragte til at have (§. 15.) eens Benævning : samme Rod-Exponenter, multipliceres og divideres med hinanden, naar 1) Størrelserne under Rodtegnet multipliceres og divideres med hinanden, og foran det udfomne Produkt eller Qvorient sættes Rodtegnet med den fælles Exponent; og 2) Coefficienterne (om der ere saadanne) multipliceres og divideres med hinanden og Produktet eller Qvorienten hensættes foran Rodtegnet.

$$\text{Ex. } \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}. \quad \sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{\frac{5}{7}}$$

$$\sqrt[m]{x^p} \times \sqrt[m]{y^q} = \sqrt[m]{x^p y^q}. \quad \sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[s]{b^r} =$$

$$\sqrt[ms]{a^{ns}} \times \sqrt[ms]{b^{mr}} \text{ (§. 15.)} = \sqrt[ms]{a^{ns} b^{mr}}. \text{ Ligeledes}$$

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[s]{b} = \sqrt[ms]{a} : \sqrt[ms]{b} = \sqrt[\frac{ms}{s}]{\frac{a}{b}}.$$

$$2\sqrt{5} \times 3\sqrt{7} = 6\sqrt{35}; \text{ og } 2\sqrt{5} : 3\sqrt{7}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{7}}. \quad c\sqrt[m]{x^p} \times d\sqrt[m]{y^q} = cd\sqrt[m]{x^p y^q}.$$

$$x\sqrt[m]{a^n} : y\sqrt[s]{b^r} = x\sqrt[ms]{a^{ns}} : y\sqrt[ms]{b^{mr}} =$$

$$\frac{x}{y} \sqrt[\frac{ms}{r}]{\frac{a^{ns}}{b^{mr}}}.$$

Anm. 1. I Henseende til Tegnene gielde de i Arithmetiken forklarede Regler; og Regningen med samme

x opløst i m ligestore Factorer, hvoraf enhver er

$\sqrt[m]{x}$ som vi vil sætte $= y$, saa at $x = y \times y \times y$ &c.

Følgetig $\sqrt[m]{x} = y = x^{\frac{1}{m}}$; $\sqrt[m]{x^2} = y \times y = x^{\frac{2}{m}}$ og i Almindelighed $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$.

Da m og n kan tillægges alle muelige Værdier, saa følger at m kan antages større end n eller ikke at kunde gaae op i n ; man faaer saaledes Potenser med Brøk-Exponenter, som ogsaa kaldes Brøk-

Potenser. S. Ex. $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$. Ogsaa er $(x^{\frac{2}{3}})^3 = x^2$. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (Arith. §. 44. Anm. og §. 52, 2 Till.). Alle Rodstørrelser kan altsaa udtrykkes som Brøk-Potenser, og denne Maade at betegne dem paa, bruges meget ofte. Imidlertid beholder man i mange Tilfælde hellere Rodtegnet, som ogsaa kort og tydelig viser hvad en Brøk-Potens egentlig betyder: nemlig at man af af et Tal, ophøiet til en Potens, hvis Exponent er Brøkenes Tæller, skal uddrage en Rod, hvis Exponent er Nævneren. S. Ex. $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$.

Tillæg 1) Heraf lader sig ulede mange Forandringer i de algebraiske Udtryk, som best sees ved Exempler, saaledes er: $a^{\frac{1}{2}} = a^{2\frac{1}{2}} = a^2 \times a^{\frac{1}{2}} = a^2 \times \sqrt{a}$; $a^{\frac{1}{3}} = a^{3\frac{1}{3}} = a^3 \times a^{\frac{1}{3}} = a^3 \times \sqrt[3]{a}$; $a^{\frac{1}{4}} = a^{3\frac{1}{4}} = a^3 \sqrt[4]{a}$.

Ligesaa $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{a^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{a}}$

sæt $a = 4$ saa er $\frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{4^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

videre er $\frac{a^2}{\sqrt{a^3}} = a^{\frac{2}{1}} \sqrt{a^{-3}}$ thi $\frac{a^2}{\sqrt{a^3}} = a^2 \times$

$\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} = a^2 \times a^{-\frac{3}{2}} = a^{\frac{4}{2}} = a^2 \times a^{-\frac{3}{2}} = a^{\frac{4}{2} - \frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

Tillæg 2) En Rodstørrelse bliver uforandret i sin Værdi, naar begge Exponenter (Potensens og Rodtegnet) multipliceres eller divideres med

et og samme Tal. Thi da $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n \times r}{m \times r}}$

(Arithm. §. 30. 4.) saa er $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \times r]{a^{n \times r}}$,

og $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \div r]{a^{n \div r}}$.

Tillæg 3) I Følge heraf lader en Rodstørrelse sig bringe til en ringere Grad, naar begge Exponenterne (nemlig den i Rodtegnet og under

Rodtegnet) have en fælles Divisor f. Ex. $\sqrt[6]{a^8}$

$= \sqrt[6 \div 2]{a^{8 \div 2}} = \sqrt[3]{a^4}$. Et Tal-Exempel $\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{8^2}$
 $= \sqrt[2]{8}$.

§. 15.

To eller flere forskellige Rodstørrelser bringes under eens Benævning (o: forandres

saaledes at de alle faae samme Rod-Exponent, eller at samme Rod skal uddrages af dem alle) 1) naar enhver Rod-Exponent multipliceres med Produktet af de øvrige Rod-Exponenter, og 2) enhver Potens-Exponent under Rodregnet multipliceres med de samme Tal eller Bogstaver hvormed Rod-Exponenten er multipliceret.

§. Ex. de givne Størrelser være $\sqrt[m]{x^n}$ og $\sqrt[s]{y^r}$ man faaer da $\sqrt[m]{x^{ns}} = \sqrt[m]{x^n}$ og $\sqrt[m]{x^{mr}} = \sqrt[s]{y^r}$ (§. 14.) Ligeledes være givne $\sqrt[m]{x^n}$, $\sqrt[p]{y^q}$, og $\sqrt[s]{z^r}$, saa er $\sqrt[m]{x^{nps}} = \sqrt[m]{x^n}$ og $\sqrt[p]{y^{qps}} = \sqrt[p]{y^q}$ ligeledes $\sqrt[m]{x^{nps}} \sqrt[s]{z^{rps}} = \sqrt[s]{z^r}$.

Rigtigheden i denne Fremgangsmaade indsees af §. 13. Till. 2.

Tillæg. Det samme skeer, ved at udtrykke Rodstørrelserne som Potenser med Brøk-Exponenter, bringe disse til eens Benævning (Arithm. §. 32.) og sætte derpaa den for dem alle fælles Rævner i Rodregnet for dem alle. §. Ex. de givne Størrelser

være $\sqrt[m]{x^n}$; $\sqrt[s]{y^r}$ saa er $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$; $\sqrt[s]{y^r} = y^{\frac{r}{s}}$ Brøkene $\frac{n}{m}$ og $\frac{r}{s}$ bragte til eens

Benævning blive $\frac{ns}{ms}$ og $\frac{mr}{ms}$. Saaledes $x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{ns}{ms}}$

og $y^{\frac{r}{m}} = y^{\frac{mr}{ms}}$ antrykkes nu disse Brøt-Exponenter ved Rodtegnet, saa er $x^{\frac{ms}{m}} = \sqrt[m]{x^{ms}} = \sqrt[m]{x^n}$; og $y^{\frac{mr}{ms}} = \sqrt[m]{y^{mr}} = \sqrt[m]{y^r}$.

§. 16.

En forlangt Rod uddrages af et givet Produkt, ved at uddrage denne Rod af enhver Faktor og multiplicere disse Røder med hinanden, da dette Produkt er Roden af det givne Produkt; ligeledes af en given Quotient (Brøt) ved at uddrage den forlangte Rod af Dividenden og Divisor, og tage, disses Quotient.

$$\begin{aligned} \text{Ex. } \sqrt[3]{ab} &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}. & \sqrt[m]{xy} &= \sqrt[m]{x} \\ & \times \sqrt[m]{y}. & \sqrt[4]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}}. & \sqrt[m]{\frac{x}{y}} &= \frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y}}. \end{aligned}$$

Bevis. $\sqrt[3]{ab}$ maa være $= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ efterdi $(\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b})^3$ er $= ab$ (§. 12.) og

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \text{ de } \left(\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \right)^n \text{ er } = \frac{x}{y}.$$

Tillæg 1) En Rodstørrelse udtrykkes for-
tete, naar Størrelsen under Rodtegnet har en
eller flere Faktorer (eller og kan opløses i saadanne
Faktorer) der have samme Exponent som Rodteg-
net, da disse bringes foran Rodtegnet som Coeffi-
cienter.

$$\begin{aligned} \text{Ex. } \sqrt[n]{a^n b^m} &= \sqrt[n]{a^n} \times \sqrt[n]{b^m} = a \sqrt[n]{b^m}. \\ \sqrt[m]{a^m b^m c^n} &= \sqrt[m]{a^m} \times \sqrt[m]{b^m} \times \sqrt[m]{c^n} = a \\ &\times b \times \sqrt[m]{c^n} = ab \sqrt[m]{c^n}. \quad \sqrt{18} = \sqrt{9} \times 2 \\ &= \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}. \quad \sqrt{48} = \sqrt{4} \times \\ &12 = \sqrt{4} \times \sqrt{12} = 2\sqrt{12}. \end{aligned}$$

Tillæg 3) Blicher efter denne Forandring
under samme Rodtegn samme Størrelse tilbage
med forskellige Coefficienter, saa forholde de irra-
tionale Rodstørrelser sig om deres rationale Coef-
ficienter.

$$\begin{aligned} \text{S. Ex } \sqrt{4} \times 11 : \sqrt{9} \times 11 &= 2\sqrt{11} : \\ 3\sqrt{11} &= 2 : 3. \quad \sqrt[n]{x^n y} : \sqrt[n]{z^n y} = x\sqrt[n]{y} : \\ z\sqrt[n]{y} &= x : z. \end{aligned}$$

Anm. En algebraisk rational Størrelse kaldes den, som kan tilfjendegives og betegnes uden Rodtegn eller ved en Exponent, som er en egentlig Brøk; irrational derimod, naar den ikke uden paa en af de nævnte Maader kan udtrykkes og dens Værdi følgelig ikke nøie angives. (Arithm. S. 54. Tillæg 1.)

Tillæg 3) Coefficienten ved en Rodstørrelse lader sig bringe under Rodtegnet; naar den ophøies til en Potens, der har samme Exponent som Rodtegnet. Ex. $3\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{3^3 \times 7} = \sqrt[3]{9 \times 7} = \sqrt[3]{63}$. $a\sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{a^n \times b^m} = \sqrt[n]{a^n b^m}$.

§. 17.

Rodstørrelser adderes og subtraheres, naar de, efter at være forforkortede saavidt muligt (§. 16. Till. 1.), have samme Rod-Exponent og samme Størrelse under Rodtegnet, og følgelig kan ansees som Ting af eens Art; ved at addere og subtrahere deres Coefficienter.

$$\text{Ex. } \sqrt[n]{x^nc} \pm \sqrt[n]{y^nc} = x\sqrt[n]{c} \pm y\sqrt[n]{c} = (x \pm y)\sqrt[n]{c}. \quad 3\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{4^3 \times 8} = 3\sqrt[3]{8} + 4\sqrt[3]{8} = 7\sqrt[3]{8}.$$

Till. Ere derimod Størrelser under Rods tegnene eller Rod Exponenterne forskiellige, da tilføiendes Additionen og Subtractionen allene ved Tegn, som i følgende Exempler.

Er. at
abhere.

$$\begin{aligned} & \sqrt{4a^2b + 19a^2bc + 14x} = 2a\sqrt{b} + 3a\sqrt{bc} + 2\sqrt{x} \quad (\S. 16. \text{ III.}) \\ & \sqrt{16a^2b - 14a^2bc - 16x} = 4a\sqrt{b} - a\sqrt{bc} - 4\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\text{Summen} = 6a\sqrt{b} + 2b\sqrt{bc} - 2\sqrt{x}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{a + m\sqrt{g}} & 2\sqrt{7} - 4\sqrt{4} \\ -\sqrt{b + m\sqrt{g}} & 3\sqrt{7} - 5\sqrt{2} \\ \hline \sqrt{a - 1\sqrt{b + m\sqrt{n + m\sqrt{g}}}} & 5\sqrt{7} - 4\sqrt{4} - 5\sqrt{2} \end{array}$$

at sub,
trahere.

$$\begin{array}{r|l} 5a\sqrt{bg} - 3c\sqrt{b^2} + 2\sqrt{b} & \\ -8a\sqrt{bg} + 7c\sqrt{b^2} + 5\sqrt{a} & \\ + & \\ \hline 13a\sqrt{bg} - 10c\sqrt{b^2} - 3\sqrt{a} & \\ 4\sqrt{ab} + 2\sqrt{a} & 3\sqrt{5} + 3\sqrt{6} \\ 6\sqrt{ab} + 3\sqrt{a} & 9\sqrt{5} - 4\sqrt{4} \\ - & + \\ \hline -2\sqrt{ab} + 2\sqrt{a} - 3\sqrt{a} & -6\sqrt{5} + 3\sqrt{6} + 4\sqrt{4} \end{array}$$

§. 12.

Rodstørrelser, der enten have, eller ere bragte til at have (§. 15.) eens Benævning : samme Rod-Exponenter, multipliceres og divideres med hinanden, naar 1) Størrelserne under Rodtegnet multipliceres og divideres med hinanden, og foran det udfomne Produkt eller Quotient sættes Rodtegnet med den fælles Exponent; og 2) Coefficienterne (om der ere saadanne) multipliceres og divideres med hinanden og Produktet eller Quotienten hensættes foran Rodtegnet.

$$\text{Ex. } \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}. \quad \sqrt[3]{5} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{\frac{5}{7}}$$

$$\sqrt[m]{x^p} \times \sqrt[m]{y^q} = \sqrt[m]{x^p y^q}. \quad \sqrt[m]{a^n} \times \sqrt[s]{b^r} =$$

$$\sqrt[ms]{a^{ns}} \times \sqrt[ms]{b^{mr}} \text{ (§. 15.)} = \sqrt[ms]{a^{ns} b^{mr}}. \text{ Ligeledes}$$

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[s]{b} = \sqrt[ms]{a} : \sqrt[ms]{b} = \sqrt[\frac{ms}{s}]{\frac{a}{b}}.$$

$$2\sqrt{5} \times 3\sqrt{7} = 6\sqrt{35}; \text{ og } 2\sqrt{5} : 3\sqrt{7}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{7}}. \quad c\sqrt[m]{x^p} \times d\sqrt[m]{y^q} = cd\sqrt[m]{x^p y^q}.$$

$$x\sqrt[m]{a^n} : y\sqrt[s]{b^r} = x\sqrt[ms]{a^{ns}} : y\sqrt[ms]{b^{mr}} =$$

$$\frac{x}{y} \sqrt[\frac{ms}{s}]{\frac{a^{ns}}{b^{mr}}}.$$

Anm. 1. I Henseende til Tegnene gielde de i Arithmetiken forklarede Regler; og Regningen med samme

sammensatte Rodstørrelser er kun Anvendelsen af de tilførn for de enkelte fremsatte Regler.

8. Ex. $2\sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\frac{2\sqrt{a} - \sqrt{b}}{}$$

$$4\sqrt{aa} + 2\sqrt{ab}$$

$$- 2\sqrt{ab} - \sqrt{bb}$$

$$4\sqrt{aa} - \sqrt{bb} = 4a - b.$$

$$(4 - \sqrt{3}) \times (3 - \sqrt{2}) = 12 - 4\sqrt{2} -$$

$$3\sqrt{3} + \sqrt{6} = 12 - \sqrt{32} - \sqrt{27} + \sqrt{6}.$$

Anm. 2. I Henseende til Rodstørrelseres Division skrives best Divisor og Dividendus, naar de ere bragte til eens Benævning i Form af en Brøk. En Rodstørrelse kan da bortstafes af Nævnerne, naar Tæller og Nævner multipliceres med samme, men med modsat Tegn.

$$\text{Ex. 1) } 10 : \sqrt{a} - \sqrt{x} = \frac{10}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} =$$

$$\frac{10\sqrt{a} + 10\sqrt{x}}{(\sqrt{a} - \sqrt{x}) \times (\sqrt{a} + \sqrt{x})} = \frac{10\sqrt{a} + 10\sqrt{x}}{a + x}.$$

$$2) \frac{3 + \sqrt{5}}{2} : \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - 1 \right) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} :$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{(3 + \sqrt{5}) \cdot (1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5}) \cdot (1 - \sqrt{5})}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{5} - 3\sqrt{5} - \sqrt{25}}{1 - 5} = \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{-4}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Eill. 1. $(\sqrt[n]{a})^3 \equiv \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a}$ (§. 7.)
 $\equiv \sqrt[n]{a^3}$ (§. 17.), følgelig $(\sqrt[n]{a})^n \equiv \sqrt[n]{a^n}$.

Eill. 2. $\sqrt[3]{(\sqrt[3]{a})} \equiv \sqrt[3 \times 3]{a} \equiv \sqrt[6]{a}$; thi $(\sqrt[3]{a})^3$
 er $\equiv \sqrt[3 \times 2]{a^3}$ (Eill. 1.) $\equiv \sqrt[6]{a}$ (§. 14), eller almin-
 delig $\sqrt[m]{(\sqrt[r]{a})} \equiv \sqrt[mr]{a}$, da $(\sqrt[r]{a})^m \equiv \sqrt[mr]{a^m} \equiv \sqrt[r]{a}$.

Eill. 3. Lader Exponenten til en given Rod-
 størrelse sig opløse i Faktorer, saa lader den givne
 Rodstørrelse sig dele i ligesaamange enkelte. **§. Ex.**
 $\sqrt[6]{a} \equiv \sqrt[3 \times 2]{a} \equiv \sqrt[3]{\sqrt[2]{a}}$. $\sqrt[6]{8} \equiv \sqrt[2]{\sqrt[3]{8}}$
 $\equiv \sqrt[2]{2}$. $\sqrt[6]{a} \equiv \sqrt[2 \times 2 \times 2]{a} \equiv \sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{a}}}$.

§. 19.

Alle Potenser af en bekræftende Rod
 ere bekræftende; men af en nægtende Rod
 ere alle de, hvis Exponenter ere lige Tal,
 bekræftende, men de, hvis Exponenter ere
 ulige Tal, benægtende.

Beviis. Kvadratet (anden Potens) af $\pm a$ er
 $\pm a^2$ (Arith. §. 43 og 52). Nu er i Almindelig-
 hed $a^{2n} \equiv (a^2)^n$ (§. 16), følgelig $(\pm a)^{2n} \equiv$
 $(\pm a^2)^n$ et Produkt af lutter bekræftende Faktorer
 og følgelig bekræftende.

Gremldeles er $a^{2n \pm 1} \equiv a^{2n} \times a$, følge-
 lig $(\pm a)^{2n \pm 1} \equiv \pm a^{2n} \times \pm a$, altsaa be-
 kræf-

Fræftende; men $(-a)^{2n+1} = +a^{2n} \times -a$,
altsaa nægtende.

Anm. n antages at betyde ethvert heelt Tal,
følgelig 2^n ethvert lige og 2^n+1 ethvert ulige Tal.

Till 1. Enhver Rod, hvis Exponent er et
ulige Tal (ulige Rod) af en bekræftende Størrelse,
kan allene være bekræftende, og af en nægtende Stør-
relse allene nægtende; saaledes er $\sqrt[3]{+27} =$
 $+3$ og $\sqrt[3]{-27} = -3$, men ikke $\sqrt[3]{+27}$
 $= -3$; thi $(-3)^3 = -27$.

Till. 1. Enhver lige Rod (hvis Exponent er
et lige Tal) af en bekræftende Størrelse kan være
baade bekræftende og nægtende, men af en næg-
tende Størrelse ingen af Delene.

Till. 3. En lige Rod af en nægtende Stør-
relse, som almindelig betegnes ved $\sqrt[2n]{-a}$, kaldes
en umuelig eller indbitdt Størrelse (quantitas
impossibilis seu imaginaria) i Modsætning af en
muelig eller virkelig Størrelse (possibilis seu realis).

Anm. De i dette Afsnit om Potenser og Rod-
størrelser fremsatte Sætninger tiene egentlig til at
forkorte Slutningerne i det analytiske Foredrag; da
det kan anses som et Algebraisterne egent hemmeligt
Sprog, udfordres der nogen Øvelse deri, naar man
uden Anstød vil læse mathematisk Skrift. Hæ-
r man denne Færdighed, vil man af det Foregaaende

let indsee Grunden til Ligheden imellem følgende Udtrykke:

$$x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^9}; \quad x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{n}{m}} = \sqrt{x^{m \mp 2n}};$$

$$y^{\frac{1}{2}} : y^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{y}; \quad \sqrt[4]{y} : \sqrt[3]{y^{-2}} = y^{\frac{6}{6}} \sqrt[6]{y};$$

$$(x - \frac{1}{2})^6 = \frac{1}{26}.$$

Anvendelsen af Læren om Potentenser paa
Decimalbrøf. (Arithm. §. 47.)

§. 20.

Af Decimalbrøfs Natur følger, at Udtrykke

som disse: $\frac{a}{10^n}$, $\frac{b}{10^m}$, kan betegne enhver Decimalbrøf, naar a og b betyde de virkelige Zifre, hvoraf Brøken bestaaer, ansete som hele Tal eller Brøfens Tæller; og n og m maa være saa store som Antallet af Decimalstederne i Brøken naar den skrives efter Arithm. §. 47.

$$\text{Da nu } \frac{a}{10^n} = a \times \frac{1}{10^n} = a \times 10^{-n}$$

og $\frac{b}{10^m} = b \times 10^{-m}$ saa kan og enhver Decimalbrøf ansees som et heelt Tal multipliceret med en Potents af 10 med en negativ Exponent.

$$\text{Nu er } (a \times 10^{-n}) \times (b \times 10^{-m}) =$$

$$ab \times 10^{-(m \mp n)} = \frac{ab}{10^{m \mp n}}, \text{ som just er den}$$

(Arithm.

(Arith. §. 50) for Multiplicationen med Decimalbrøf givne Regel, naar det betænkes, at saamange Decimalsteder affieres i Produktet som $m+n$ angiver; hvilken Exponent er Summen af Faktorernes Exponenter, og altsaa Summen af deres Decimalsteder.

$$\text{Fremdeles er } (a \times 10^{-n}) : (b \times 10^{-m}) = \frac{a}{b} \times \frac{10^{-n}}{10^{-m}} = \frac{a}{b} \times 10^{-n+m}. \text{ Man antage}$$

$$\text{nu } \frac{a}{b} = q, \text{ saa er } \frac{a}{b} \times 10^{-n+m} =$$

$$q \times 10^{-(n-m)} = q \times \frac{1}{10^{n-m}} = \frac{q}{10^{n-m}}; \text{ det}$$

er: man dividerer de rirkelige Zifre eller Tællerne som betegnedes ved a og b ; men i Quotienten q rykkes Decimaltegnet saa mange Zifre mod venstre som Tallet $n-m$ angiver, d. e. saa mange som der ere flere Decimaler i Dividenden end i Divisor. I det Tilfælde at m var $< n$, og altsaa $n-m$ en nægtende Mængde, da maa Decimaltegnet rykkes saa mange Zifre mod høire, d. e. der maa seses Nuller til. See Arith. §. 51.

Ann. Hvad der om de saakaldte tredsindstyvende Deels Brøf (fractiones sexagenales) o: Brøf, hvis Nævner er 60 eller en Potens af 60, kunde være at sige, har jeg med Tid forbigaaet, da deres Anvendelse er saa saare stelden, og det desuden let kan forstaaes af det som om Decimalbrøf er sagt.

Om Equationer (Ligninger) og deres Opløsning.

I. Om Ligninger i Almindelighed.

§. 21.

So forskellige Udtryk for een og samme Størrelse forbundne med Lighedss, Tegn kaldes en Ligning. F. Ex. 1 Rdlr. = 6 Mk. $8 = 5 + 3$. Størrelserne kan være udtrykt ved Tal eller Bogstaver; disse kan betegne bekiendte eller ubekiendte Størrelser. Efter almindelig Vedtægt bruges de første smaa Bogstaver af det latinske Alphabet til at betegne de givne eller bekiendte Størrelser (naar man ikke vil udtrykke dem ved Tal), og de sidste Bogstaver af samme Alphabet, x, y, z o. s. v. til at betegne de søgte eller ubekiendte Størrelser. Ex. $a + c = x - d$ vil sige, at der søges en Størrelse x som er af den Bestaaffenhed, at naar en bekiendt Størrelse d fradrages, bliver det Tilbageblevne liig Summen af to bekiendte Størrelser a og c ; med Tal $8 + 5 = x - 3$. De to lige store Udtryk kaldes Equationens Sider (membra), og de forskellige med $+$ eller $-$ forbundne Tal eller Bogstaver paa hver Side kaldes Equationens Leed (termini); saaledes ere i det anførte Exempel to Leed

Leed paa høer Side, derimod i dette Exempel $\frac{ba}{c} = x$
 er kun eet Leed paa høer Side, da $\frac{ab}{c}$ kun er een
 algebraisk Størrelse.

Anm. 1. Algebra (i en indskrænket Bemærkelse)
 er den Deel af de analytiske Videnskaber, som lærer
 af givne Betingelser at finde ubekjendte søgte Stør-
 relser ved Hielp af Ligninger. Navnet Algebra er
 af arabisk Oprindelse, hvist om efter en Mand Geber,
 der har dyrket denne Videnskab, eller efter et arabisk
 Ord, der efter Golius skal betyde reductionem par-
 tium ad totum. (Delenes Reduction til et Heelt.)

Anm. 2. De Ligninger, som her især handles
 om, og som almindelig forstaaes naar man taler om
 Ligninger (maaskee man kunde kalde dem egentlige
 Ligninger), ere de, hvori der forekomme een eller
 flere ubekjendte Størrelser, da de andre, hvori Al-
 le er bekjendt, saa at sig selv opløse sig selv, og dertil
 ingen videre Forklaring behøves.

§. 22.

At opløse en saadan Ligning er at forandre
 den saaledes, at man derved finder Værdien af
 den ubekjendte Størrelse, dette opnaaes naar denne
 bringes alene paa den ene Side af Liighedss- Teg-
 net, og paa den anden Side findes altsam-
 me.

Den Hele Fremgangsmaade ved Opløsningen
 grunder sig alene paa de i Arithmetiken §. 38.
 fremsatte almindelige Grundsætninger, hvis An-

Løsning forekommende Tilfælde (da den maaskee ikke ellers vilde falde Begyndere saa let) jeg her vil vise; den lader sig henføre under følgende Regler:

- 1) Ethvert enkelt Led i en Ligning kan flyttes fra den ene Side til den anden (§. 21) med forandret Tegn. F. Ex. $3x - 12 = 20 + 8$ kan forandres til $3x = 20 + 8 + 12$, thi ved denne Omflytning er 12 egentlig lagt til paa begge Sider; ligeledes kan $3x + 8 = 30 + 18$ forandres til $3x = 30 + 18 - 8$, hvor 8 egentlig subtraheres fra paa begge Sider, og Ligningen bliver altsaa i begge Tilfælde uforandret (Arithm. §. 38 No. 4).
- 2) Tegnene ved alle Ledene i en Ligning kan forandres til de modsatte. F. Ex. Ligningen $2x + 12 - 8 = 54 - 3x$ kan udtrykkes saaledes: $-2x - 12 + 8 = -54 + 3x$. Rigtigheden indsees af No. 1, da det egentlig ikke er andet end at alle Ledene flyttes, og derpaa Siderne omsættes.
- 3) Enhver Ligning lader sig bringe til at være liig Nul: at alle Ledene bringes paa een Side, f. Ex. den No. 2 anførte Ligning $2x + 12 - 8 = 54 - 3x$ bliver $2x + 12 - 8 - 54 + 3x = 0$.
- 4) Ved at dividere hele Ligningen med en fælles Faktor udtrykkes Ligningen simplere; og

den ubekjendte Størrelse befries fra sin bekjendte Coefficient, naar hele Ligningen dermed divideres. Ex. $15bc = 24ab + 3bx$ udtrykkes, ved at dividere overalt med b , saaledes $15c = 24a + 3x$; ved igien at dividere med den fælles Faktor 3 (som tillige er den ubekjendte x 's Coefficient), faaer man $5c = 8a + x$.

5) Enhver Divisor bortskaffes ved at multiplicere alle Ledene i Equationen dermed.

Ex. $\frac{x}{5} = 20$ bliver, ved at multiplicere med 5, $x = 20 \times 5$.

Tillæg. Brøk bortskaffes af en Ligning ved at multiplicere hele Ligningen med Produktet af Brøkenes Nævniere. Ex. Af Ligningen $\frac{2}{3}x = a - \frac{1}{4}b$ bliver, ved at multiplicere med $3 \times 2 \times 4 = 24$, følgende Ligning: $16x = 24a - 18b$.

Anm. Her kunde det samme været opnaaet ved at multiplicere med 12, som er fælles Nævner for Brøkene $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$. (Arithm. S. 32).

6) For at formindste Ledenes Antal i en Ligning, og især for at kunde befrie den ubekjendte Størrelse fra sine Coefficienter, træffer man de forskjellige enkelte Coefficienter, som samme Størrelse kan have, sammen i en Parentese. Ex. $2x + 3x = 20$ forandres

drøes $(2+3)x = 20$, eller $5x = 20$. $ax - bx + cx = fh + gh$ forandres saaledes:
 $(a-b+c)x = (f+g)h$, og efter No. 4

$$x = \frac{(f+g)h}{a-b+c}.$$

7) En Potens (med enhver Exponent) bortskaffes af en Equation ved at bringe den allene paa den ene Side og udtrække den Rod paa begge Sider, som Exponenten angiver. Ex. $x^2 - 8 = 17$, efter No. 1, $x^2 = 17 + 8 = 25$, altsaa $\sqrt{x^2} = \sqrt{25}$, og $x = 5$. Ligeledes bortskaffes Rodtegnet eller en irrational Størrelse, ved at bringe den allene paa den ene Side, og derpaa ophøie begge Sider til den Potens, som Exponenten i Rodtegnet angiver. Ex. $\sqrt{x+a-b} = c$ bliver $\sqrt{x} = c - a + b$ og $(\sqrt{x})^2 = (c - a + b)^2$ $x = (c - a + b)^2 = c^2 - 2ca + a^2 - 2(c-a)b + b^2$. (Ar. §. 55 Till. 2).

For strax at see Anvendelsen af disse Regler tilføies et Par Exempler.

Lad til Oplosning være givet

$$\frac{a}{x} - b = c - 1$$

faa er efter No. 5) $a - bx = cx - x$

No. 1) $x - cx + bx = -a$

No. 2) $-x + cx + bx = a$

No. 6) $(-1 + c + b)x = a$

No. 4) $x = \frac{a}{1 \mp c \mp b}$ og nu
er Ligningen opløst.

Gremdeles være $ax + bn - bx = cn$
saa er efter No. 1) $ax - bx = cn - bn$

$$6) (a - b)x = (c - b)n$$

$$4) x = \frac{(c - b)n}{a - b}$$

Anm. At reducere en Ligning er egentlig ikke
andet, end ved Anvendelse af de her foredragne
Regler at forføre den og fremstille den saa simpel
som mueligt.

§. 23.

Ligningerne pleie at inddeles med Hensyn til
den eller de ubekiendte Størrelser der findes i dem;

1) I bestemte, som kun have een ubekiendt Stør-
relse, hvis Værd altsaa ved de bekiendte fuld-
kommen er bestemt, enhver saadan Ligning kan
derfor nøiagtigt opløses; Ex. $2x = 30 - 7$,

hvor $x = \frac{30 - 7}{2}$; og ubestemte, der have

to eller flere ubekiendte Størrelser, hvis Vær-
die ved den ene Ligning ikke kan bestemmes
og Ligningen altsaa ikke opløses (§. 22.) Ex.

$x + y = 20$, hvor x og y kan tillægges 20
forskjellige Værdier.

2) I enkelte (eller af første Grad), hvor den eller
de ubekiendte Størrelser allene forekomme i første
Potens; dog maae de ikke være multiplicerede

med

med hinanden, og heller ikke forekomme baade

som Divisor og Faktor. Ex. $\frac{3x}{4} + 12 = 8$

$= 10 - x$; men $(100 - x) x = a$ er ikke

længer en enkelt Ligning, heller ikke $\frac{2}{3}x = \frac{1}{4}x$

$= \frac{100}{x}$; da ved Opløsningen den ubekiendte

Størrelse vil blive multipliceret med sig selv,

og saaledes forekomme i en høiere Potens.

Og sammensatte (maaskee rettere høiere), hvor

den ubekiendte Størrelse forekommer i noget en-

kelt Led anderledes end i første Potens, og Lig-

ningen kaldes da af 2den, 3die eller 4de Grad,

eller quadratisk, cubisk, biquadratisk, eftersom den

ubekiendte Størrelse forekommer i 2den, 3die eller

4de Potens.

En sammensat (høiere Ligning) er igjen enten

reen (pura), naar den bekiendte Størrelse forekom-

mer overalt i Ligningen i samme Potens; eller

ureen (forviflet, impura affecta), naar den i samme

Equation forekommer i flere forskellige Potenser.

Amm. Algebra (i en ængere Forstand) indskræn-

ker sig allene til at lære Opløsningen af de enkelte

og quadratiske saavel reene som urene Ligninger; Lig-

ninger derimod af 3die, 4de o. s. v. Grad (der sæd-

vanlig indbefattes under Navnet høiere Ligninger)

opløses efter Theorier, der foredrages i den alminde-

lige Analyse, som og kaldes Algebra i en vidtløftig

Bemærkelse.

II. Om enkelte Ligningers Opløsning og deres Anvendelse paa arithmetiske Problemer.

§. 24.

Opgave. At opløse en enkelt Ligning med een ubekiendt Størrelse (bestemt Ligning).

Oploøsn. Man bortskaffer Brøkene, hvormed den ubekiendte kunde være multipliceret, eller de hele Tal, hvormed den kunde være divideret efter §. 22. No. 5, (forekommer den ubekiendte selv som Divisor, maa med den og multipliceres); derpaa bringes efter §. 22. No. 1 de ubekiendte Størrelser paa den eene og de bekiendte paa den anden Side. Nu samles den ubekiendte Størrelses Coefficienter i en Parenthes (No. 6), og dermed divideres hele den anden Side af Ligningen, der bestod af lutter bekiendte (No. 4).

Ex. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x = 28 - \frac{3}{4}x$

Brøken bortskaffes ved at multiplicere med 12, som er Produktet af begge de forskellige Nævne man faaer

$$8x - 3x = 336 - 9x$$

de ubekiendte bringes paa een Side, og derpaa blive

$$8x - 3x + 9x = 336$$

den ubekiendtes Coefficienter bragte i Parenthes, og man faaer

$$(8 - 3 + 9)x = 336$$

man

Man dividerer med den
ubekiendtes Coefficienter,
og Ligningen er da opløst
∴ man har fundet Vær-
dien for x .

$$x = \frac{336}{8 - 3 + 9}$$

Anm. Da Coefficienterne ved den ubekiendte
her vare Tal, kunde man strax have adderet og sub-
traheret dem, uden at bringe dem i Parenthes.

§. 25.

Et algebraisk Problem (Opgave) er egentlig
et Spørgsmaal, hvorledes man af nogle givne
bekiendte Størrelser kan finde Værdien for een eller
flere ubekiendte, som derved bestemmes. Saavidt
saavel de bekiendte som ubekiendte Størrelser ere
Tal, eller kunde udtrykkes ved Tal, kan Problemet
falde arithmetisk; ere de derimod Linier, geometrisk.

Det første og vigtigste ved et Problems Op-
løsning er, at man af de i Problemet anførte Be-
tingelser og Forbindelser imellem de bekiendte og
ubekiendte Størrelser kan ulede (eller danne) en
Ligning. Dette kalder man at formere en Ligning.
Maaden, hvorpaa den første Ligning (fundamental-
eller Grund Ligning) af ethvert Problems Betin-
gelses skal udledes, lader sig ikke bestemme i Al-
mindelighed, men overlades til enhver egen Døm-
mekraft; som ved mange Exempler bør sees; alt
hvad derom i Almindelighed kan foreskrives, er efter
mit Skønne denne Regel: Man skielner først
noie

noie, hvad Spørgsmaals-Tingen (quæstum) eller den ubekiendte Størrelse er; være dernæst opmærksom paa alle Betingelser derved; noie gjøre Forskiel paa det Hovedsagen uvedkommende og kun som Beting anførte, og det der til Problemet's Oplosning er væsentlig nødvendigt; og endelig sege at udtrykke i det algebraiske Sprog de imellem de bekiendte og ubekiendte Størrelser i Problemet anførte Forbindelser.

Er Grund-Tegningen formeret, da er Problemet opløst, naar Tegningen er opløst, hvis der i Problemet kun er een Ting der spørges om eller een ubekiendt Størrelse; og om saadanne Problemer er det her først handlet.

§. 26.

1ste Opgave. En Mand giver den første Fattige han møder Halvparten af de Penge han har hos sig; den anden Fjerdeparten af de Penge, han fra Begyndelsen havde; den tredie Ottedeparten af samme Penge; og den fjerde Tolvdeparten; nu finder han at han har 3 Skilling tilbage. Der spørges, hvor mange Penge han fra Begyndelsen havde, og hvad hver Fattig fik.

Oplosn. Det sees let, at her kun er een ubekiendt Størrelse, nemlig hvor mange Penge han havde;

havde ialt; thi hvad hver Gattig fik, findes da ved simpel Regning.

Vi falde altsaa det Tal, der udtrykker Mængden af hans Penge i Skillinge, x , og finde Fundamental-Ligningen saaledes:

Med Ord:

Med algebraiske Tegn:

Der søges et Tal x

hvis Halvpart og $\frac{1}{2}x$

Fierdepart og $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x$

Ottendepart og $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x$

$\frac{1}{12}$ part og 3 Sk. $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{12}x + 3$

udgør Tallet $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{12}x + 3 = x$

Vi have nu Grundligningen:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{12}x + 3 = x.$$

Brøken bortskaffes ved at multiplicere med Brøken's mindste fælles Nævner 24 (§. 22 No. 5), og

vi har $12x + 6x + 3x + 2x + 72 = 24x$

Ligningen forfættes, og er $23x + 72 = 24x$

De ubekiendte bringes

på een Side (§. 22 No. 1) $72 = 24x - 23x$

deraf efter No. 6; $72 = (24 - 23)x$

$$72 = 1x = x.$$

Det søgte Tal er altsaa 72, og han havde hos sig

72 Skilling. Første Betler fik $\frac{1}{2} \times 72 = 36$ β.,

anden fik $\frac{1}{4} \times 72 = 18$ β., tredie fik $\frac{1}{8} \times 72 =$

9 β., fjerde fik $\frac{1}{12} \times 72 = 6$ β.; lægges nu disse

Summer sammen, udkommer Tallet 69, som, forsøgt

med

med de 3 Skilling, han beholdt tilbage, udgør 72 Sk., der saaledes er Prøve-Regning, hvoraf seer, at det fundne Tal 72 er det rette.

Lill. Ved at betragte saavel Fremgangsmaaden ved at formere Fundamental-Ligningen som Prøve-Regningen i foregaaende Problem, kunde og uledes følgende Regel for at faae et arithmetisk Problem bragt i en Ligning: Man forestiller sig at Problemet allerede var oplost, og at man vilde gjøre Prøve; man seer da, at der med det til Problemet's Oplosning fundne Tal maatte foretages visse Forandringer (Regnings-Operationer) for at udbringe et vist Tal, der efter Problemet's Bestemmelse maa udfomme, hvis Problemet er rigtig oplost. Nu vælger man et Bogstav, f. Ex. X, og behandler det paa samme Maade som man ved Prøven behandlede det Tal, der var fundet at skulde opløse Problemet, og hvad der ved denne Behandling udfommer, sættes paa den ene Side af Lighedstegnet, og paa den anden Side det som skulde udfomme, hvis Problemet var rigtig oplost.

Anm. Videre Anvisning, især for dem der vilde lære sig selv Algebra, af Problemet's Betingelser at danne Fundamental-Ligningen, findes i Kahr's Veiledning i Algebra. Kjøbenhavn. 1802.

§. 27.

2den Opgave. At finde et Tal, hvis Halvpart, Trediepart og Fierdepart tilsammen lagte ere een større end Tallet selv.

Fundamental-Ligningen dannes let ved at ansee det søgte Tal som fundet og kalde det X , dermed foretages de angivne Forandringer, man tager nemlig dets Halvpart, Trediepart og Fierdepart og summerer dem; denne Sum sættes paa den eene Side af Lighedstegnet og udgør Ligningens eene Side; og paa den anden Side det der skulde udkomme efter Betingelsen, nemlig Tallet X og een

Algebraisk udtryk staaer det saaledes:

$$\text{Tallet} = x$$

$$\text{dets Halvpart} = \frac{1}{2}x$$

$$\text{Trediepart} = \frac{1}{3}x$$

$$\text{Fierdepart} = \frac{1}{4}x$$

$$\text{summerende} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x$$

der er een større end Tallet selv; altsaa bliver Fundamental-Ligningen:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1, \text{ der forandret (§. 22 No. 5) er } 6x + 4x + 3x = 12x + 12$$

$$\text{og forkortet} \dots 13x = 12x + 12$$

De ubekiendte bringes

$$\text{paa een Side (§. 22 No. 1) } 13x - 12x = 12$$

$$\text{forkortet} \dots x = 12$$

12 er saaledes det fundne Tal, som ved Prøve ogsaa

ogsaa findes at opfylde Betingelserne, da det 8 Halvpart 6, og Trediepart 4, og Fierdepart 3 sammenlagte udgiøre 13, som er een høiere end Tallet selv.

§. 28.

3die Opgave. Een fiobte en Sabel, en Ring og et Romme-Uhr; alle tre Stykker koste 100 Rdlr., men Ringen koster 4 Rdlr. mere end Sabeln, og Uhret 20 Rdlr. mere end Ringen. Spørges: hvad har Køberen givet for ethvert Stykke?

Oplosn. Ved første Biefast synes det som her vare tre ubekiendte Størrelser; men ved, efter den 25 §. givne Regel, nøie at overveie Betingelserne, sees, at kun Sabelens Priis er den sagte Størrelse, da de øvrige derved bestemmes. Fundamental-Ligningen findes da efter §. 25 og 26 Till. Naar Sabelens Priis sættes $= x$

og folgelig Ringens $= x + 4$ Rdlr.

og Uhrets $= x + 24$ Rd.

at være; $x + x + 4 + x + 24 = 100$

forkortet $3x + 28 = 100$

(§. 22. No. 1) $3x = 100 - 28 = 72$

(§. 22. No. 4) $x = 24$ som er Prisen for Sabeln; deraf findes Ringens at være 28 og Uhrets 48, som sammenlagte udgiøre 100 Rdlr.

§. 29.

§. 29.

4d Opgave. En Courer, der daglig skal reise 8 Mile, er allerede for 9 Dage siden afgaaet; en anden sendes nu for at indhente ham, og befales at reise daglig 12 Mile. Spørges: hvor mange Dage vil forløbe fra den sidste Afreise førend han naaer den første?

Opløs. Fundamental-Ligningen findes let, naar man lægger Mærke til, at den sidste just da har naaet den første, naar de begge have reist lige mange Mile.

Kaldes nu Antallet af de Dage, den sidste reiser (som er den søgte Størrelse) x , saa er Miles Antallet $= 12x$; den første var reist 6 Dage forud, følgelig i alt $x + 6$ Dage, og Mile Antallet $= (x + 6) 8$.

$$\text{Saaledes er } 12x = (x + 6) 8$$

og naar Parenthesen

$$\text{hæves} \dots 12x = 8x + 48$$

$$(\S. 21. \text{No. 1}) \quad 12x - 8x = 48$$

$$\text{forkortet} \dots 4x = 48$$

$$(\S. 21. \text{No. 4}) \dots x = 12.$$

Ex. 1. Udtrykker man de bekjendte Størrelser ved Bogstaver, nemlig de første Bogstaver af Alphabetet (§. 21), saa faaer man ved Ligningens Opløsning en almindelig Form, der

gælder.

gælder for alle lignende Tilfælde, og hvoraf igien kan uledes saa mange forskellige Ligninger som der findes Størrelser, da enhver kan antages som ubekendt og bestemmes ved de øvrige.

Kalde vi i nærværende Exempel Mile-Tallet, den første Coureur A reiser daglig, a , de Dage, han har reist forud, b , og Milene, den anden B reiser daglig, c , saa bliver Grundligningen:

$$(x + b)a = cx$$

$$\text{og } ax + ab = cx$$

$$(\S. 20. No. 6) ab = cx - ax = (c - a)x$$

$$\text{No. 4) } \frac{ab}{c - a} = x, \text{ som udtrykt med}$$

Ord er: Man finder Dage-Mtallet x , efter hvilke B vil indhente A, naar man dividerer Milene, som A har forud, med Differencen imellem de Mile, de daglig begge reise.

Till. 2. Af disse fire Størrelser a, b, c, x , som Ligningen indeholder, kan enhver antages som ubekendt og de øvrige findes. Saaledes findes

$$b = \frac{(c - a)x}{a}, \text{ thi vi havde } \frac{ab}{c - a} = x$$

$$\text{altsaa } (\S. 20. No. 5) ab = cx - ax$$

$$\text{og } (\S. 20. No. 6) ab = (c - a)x$$

$$(\S. 20. No. 4) b = \frac{(c - a)}{a}x \quad \text{3: Antal}$$

let af Dagene, A har reist forud, findes naar
Diffe-

Differencen af deres daglige Mile multipliceres med Antallet af B's Reisedage og Produktet igien divideres med Antallet af de Mile, A reiser daglig.

Paa samme Maade findes $c = \frac{ab}{x} + a$;

$$\text{og } a = \frac{cx}{b+x}.$$

§. 30.

5te Opgave. Man har to Masser af forskellige givne Værdier; der spørges: hvormed man skal tage af hver, for at frembringe en Blanding af en vis bestemt Værdie (som dog er imellem de to givne)? Lad Eenheden af den bedre Masse koste a , af den ringere b , og af Blandingen c .

Bed at anvende de forhen givne Regler sees let, at den ubekiendte Størrelse x er den Deel af een af de givne Masser, som vi tage til Blandingen; thi er den bestemt, følger af sig selv, at det der tages af den anden Masse maa være hvad x mangler i Eenheden.

Lad her x være det af den ringere Masse der tages, saa maa af den bedre tages $1 - x$; Prisen bliver for begge Dele altsaa $bx + a(1-x) = bx + a - ax$. Dette skal være Værdien af Blandingen, som er bestemt $= c$; vi faae altsaa Fundamental-*Equationen*

$$bx +$$

$$bx + a - ax = c$$

$$(\S. 22 \text{ No. 1}) \quad bx - ax = c - a$$

$$(\S. 22 \text{ No. 2}) \quad ax - bx = a - c$$

$$(\S. 22 \text{ No. 6}) \quad (a - b)x = a - c$$

$$\text{No. 4)} \quad \dots \quad x = \frac{a - c}{a - b}$$

Det er: Man finder den Deel man skal tage af den ringere Masse for at frembringe Blandingen, naar Forskiellen imellem Værdien for en vis Eenhed af den givne Masse og af Blandingen divideres med Forskiellen mellem Værdien for samme Eenhed af begge de givne Masser.

Ex. Af en bedre Slags Viin som koster 40 β . Potten og en ringere Slags der koster 24 β . vil en Viintapper gjøre en Blanding som kan sælges for 2 Mk.; hvormegit skal han tage af hver Sort? Efter Formen findes hvad han skal tage af den ringere Sort at være

$$x = \frac{40 - 32}{40 - 24} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

følgelig skal han tage Halvdelen af den ringere Sort og altsaa Halvdelen af den gode for at faae Blandingen til den bestemte Priis.

Sætte vi, at han isteden for ringere Viin blander Vand i den bedre for at kunde sælge den for den bestemte Priis, og der spørges: hvormegit Vand kan han sætte til? da findes det efter samme

me Form; kun at b sættes $= 0$, da Vand intet koster.

Efter den fundne Form var $x = \frac{a - c}{a - b}$

men $b = 0$, altsaa er $a = \frac{a - c}{a}$ og med

Saa $x = \frac{40 - 32}{40} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$, følgelig

maa han til den gode Viin sætte $\frac{1}{5}$ Vand for at kunde sælge den til den bestemte Priis.

§. 31.

6te Opgave. En Kiøber nogle Allen Tøi og betaler for hver 2 Allen 7 Rdlr.; han sælger igien hver 3 Allen for 11 Rdlr. og vinder derved 50 Rdlr. Nu spørges, hvor mange Allen Tøi han kiøbte.

Bed opmærksomt at betragte Opgaven sees let, at den Sum, han ndbragte ved sit Salg, maa være saa stor som baade Indkøbssummen og Gevinsten.

Antallet af Allen Tøi være x ; Prisen for det Solgte findes da saaledes:

$$3 \text{ Allen} : x \text{ Allen} = 11 \text{ Rdlr.} : \frac{11x}{3}$$

$$\text{Indkøbsprisen saaledes } 2 \text{ Al.} : x \text{ Al.} = 7 \text{ Rd.} : \frac{7x}{2}$$

Grundligningen er følgende $\frac{7x}{2} + 50 = \frac{11x}{3}$

$$\text{altsaa (\S. 22. No. 5.) } 7x + 100 = \frac{22x}{3}$$

$$\text{deraf . . . } 21x + 300 = 22x$$

\S. 22. No. 1.) $300 = 22x - 21x = x$,
han havde kiøbt 300 Alen.

\S. 32.

7de Opgave. At dele et givet Tal a i to
Dele saaledes, at den større Deel, forøget
med et givet Tal b , skal forholde sig til den
mindre, forøget med et givet Tal c , som $m:n$.

At dette Problems Betingelser lader sig ikke
strax umiddelbar ulede nogen Grundligning, men
kun en Proportion, hvoraf Ligningen (Arithm.
\S. 73.) let findes. Sættes her den største Deel
af Tallet $a = x$, saa er den mindre $a - x$, og
Proportionen bliver

$$(x + b) : (a - x + c) = m : n$$

$$\text{deraf følger } n(x + b) = m(a - x + c)$$

$$\text{som bliver } nx + nb = am - mx + cm$$

$$(\S. 22 \text{ No. 1.}) \quad nx + mx = am + cm - nb$$

$$\text{No. 6.}) \quad (n + m)x = am + cm - nb$$

$$x = \frac{am + cm - nb}{n + m}$$

Ex.

Ex. Lad være $a = 24$, $b = 13$, $c = 5$,
 $m = 10$, $n = 5$, saa er

$$x = \frac{24 \times 10 + 5 \times 10 - 13 \times 5}{10 + 5}$$

$$x = \frac{240 + 50 - 65}{15} = \frac{225}{15} = 15.$$

Altsaa er den største Deel 15,

følgelig den mindre . . . 9, der ogsaa opfylder
 Betingelsen, da $(15 + 13) : (9 + 5) = 10 : 5$.

§. 33.

Indeholder en Opgave to eller flere ubekiendte
 Størrelser, eller der ere to eller flere Ting, hvor-
 om der spørges, da, naar den indeholder tillige
 saa mange Betingelser, at deraf kan, efter de for-
 hen anførte Regler, udledes ligesaamange Grund-
 ligninger, som Opgaven indeholder ubekiendte
 Størrelser, findes Værdien for enhver af de ube-
 kiendte paa følgende Maade:

Man søger af de fundne Grundligninger,
 hvori der efter Ligningernes Antal ere to eller flere
 ubekiendte Størrelser, at frembringe en eenestg
 Ligning, hvori der kun er een ubekiendt Størrelse;
 dette kaldes at eliminere eller bortskaffe den eller
 de ubekiendte; og det opnaaes paa een af disse tre
 Maader:

1) Ved Substitution (maaskee man kunde med et nyt Ord kalde det Istedsettelse) 3: ved at søge af den første Ligning en Værdie for den ubekjendte Størrelse man først vil bortskaffe (hvilken kan vælges vilkaarligt) og indsætte denne fundne Værdie i de andre Ligninger; dernæst paa samme Maade søge en Værdie for den anden ubekjendte af den anden Ligning, og indsætte den i de andre Ligninger o. s. f.

Lad til Exempel være givne følgende tre Grunds ligninger:

$$1) x + y = 30$$

$$2) y + z = 18$$

$$3) x + z = 24$$

Man søger af Ligningen No. 1. efter de §. 22. forklarede Regler, en Værdie for x , og finder da $x = 30 - y$. Denne Værdie for x indsat i No. 3 giver No. 4, nemlig

$30 - y + z = 24$, som behørig reduceret giver No. 5; $y - z = 6$.

Af No. 2 findes $y = 18 - z$ denne Værdie indsat i No. 5 giver $18 - z - z = 6$, som reduceret og omsat bliver $2z = 18 - 6$

$$2z = 12$$

og følgelig $z = 6$. Indsættes nu denne fundne Værdie i No. 5; findes $y = 12$, og denne Værdie indsat i No. 1 giver $x = 18$.

2) Ved

2) Ved Combination (Forbindelse) 2: af to forskellige Ligninger, hvori samme ubekendte Størrelse findes, søger man to forskellige Udtryk for denne ubekendte Størrelses Værdie; disse Udtryk maa være ligestore (Arithm. §. 38), og forenede ved Lighedstegn give de en Equation, hvori denne ubekendte Størrelse ikke findes, og saaledes vedblives indtil man faaer en Equation, hvori kun er een eneste ubekendt. Lad til Exempel være givne tre Ligninger:

$$A) x + y + z = 36$$

$$B) x + 3y - 2z = 48$$

$$C) x - y + 3z = 30$$

Nu findes af Equation A, $x = 36 - y - z$,
af Equation B, $x = 48 - 3y + 2z$
og af Equation C, $x = 30 + y - 3z$.

Af A og B faaes (Arithm. §. 38.) Ligningen D: $36 - y - z = 48 - 3y + 2z$,
hvoraf findes: $2y = 48 - 36 + 3z$

$$\text{og } y = \frac{12 + 3z}{2}$$

af B og C faaes $30 + y - 3z = 48 - 3y + 2z$

$$\text{og } 4y = 28 + 5z$$

$$y = \frac{28 + 5z}{4}$$

Ved at combinere de to for y fundne Værdier faaer man

$$\frac{28 + 5z}{4} = \frac{12 + 3z}{2}, \text{ som er en Ligning}$$

ning

ning, hvort der kan findes en ubekendt Størrelse, der opløses efter de forklarede Regler og bliver

$$(\S. 22. No. 5) \quad 28 + 5z = \frac{48 + 12z}{2}$$

$$56 + 10z = 48 + 12z$$

$$56 - 48 = 12z - 10z$$

$$8 = 2z$$

$$4 = z$$

Denne Værdie indsat i den iforveien uledte Equation

$$y = \frac{28 + 5z}{4} \text{ gibe}$$

$$y = \frac{28 + 20}{4} = 12 \text{ og}$$

disse for y og z fundne Værdier indsatte i Equationen $x = 36 - y - z$ giver

$$x = 36 - 12 - 4$$

$$x = 20.$$

3) Ved Addition eller Subtraction 2: ved at addere eller subtrahere to Equationer, hvort findes flere ubekendte Størrelser, at bortskaffe den ene, som seer:

a) Naar den ubekendte har samme Coefficient i begge Equationer: ved at addere Ligningerne sammen naar den ubekendte Størrelse har $+$ i den ene og $-$ i den anden Ligning; men ved at subtrahere den ene Ligning fra den anden naar den ubekendte har samme Tegn i dem begge.

Ex.

$$\text{Ex. } 3x - 2y = a$$

$$x + 2y = b$$

$$\text{Deraf ved Addition } 4x = a + b$$

$$3x - 4y = a$$

$$2x - 4y = b$$

$$- \quad + \quad -$$

$$\text{ved Subtraction } x = a - b$$

b) Naar den ubekiendte, man vil bortskaffe, har forskiellige Coefficienter i de givne Equationer, da maae Equationerne forandres saaledes, at den ubekiendte faaer samme Coefficient i begge, som skeer ved at multiplicere alle Ledene i den ene Equation med den Coefficient, som den ubekiendte Storrelse har i den anden; og derpaa fortsaare som i forrige Tilfaelde.

$$\text{Ex. No. 1. } 3x + 2y = a$$

$$\text{No. 2. } x - 3y = b$$

Skal y bortskaffes, multipliceres

$$\text{No. 1 med 3, og vi faae } 9x + 6y = 3a$$

$$\text{og No. 2 med 2, hvor vi faae } 2x - 6y = 2b$$

$$\text{Ved Additionen findes nu } 11x = 3a + 2b$$

Den videre Anvendelse af disse Metoder til at bortskaffe (eliminere) de ubekiendte Storrelser paa een naar, naar der ere givne saa mange Equationer som der ere forskiellige ubekiendte Storrelser, vil bedst sees ved Anvendelsen deraf til Problemers Oplosning.

§. 34.

8de Opgave. En har to Solvbægere, men kun eet Laag; det første Bæger veier 12 Lod, men tilligemed Laaget dobbelt saa meget som det andet; det andet veier tilligemed Laaget tre Gange saa meget som det første. Der spørges: hvad veier Laaget? og hvad veier det andet Bæger?

Der er to ubekiendte Størrelser; Vægten af Laaget, som vi vil kalde x , og Vægten af det andet Bæger, som kan være y . Vi finde nu let, ved at overveje Betingelserne, følgende to Grundligninger:

$$\begin{array}{lcl} 1) & x + 12 = 2y & \left\{ \begin{array}{l} \text{: Laagets Vægt } x \text{ Lod og} \\ \text{det første Bægers } 12 \text{ Lod er} \\ \text{det dobbelte af det andet} \\ \text{Bægers Vægt } 2y. \end{array} \right. \\ 2) & y + x = 3 \times 12 & \left\{ \begin{array}{l} \text{: Vægten af Laaget og det} \\ \text{andet Bæger } x + y \text{ liig} \\ \text{det tredobbelte af første} \\ \text{Bægers Vægt } 3 \times 12. \end{array} \right. \end{array}$$

Vil vi anvende Substitutions-Metoden (§. 33. I.) da søges Værdien for x i den første Equation, og findes $x = 2y - 12$. Denne Værdie indsat i den anden Equation, faae vi Ligningen

$y + 2y - 12 = 3 \times 12$, som har kun een ubekiendt Størrelse, og opløses let efter

- de

gionne Regler; og findes

$$3y = (3 \times 12) + 12 = 48$$

$$y = 16$$

men vi havde $x = 2y - 12$

$$\text{altsaa } x = 32 - 12 = 20.$$

Tillæg. Med Fordeel kunde her Subtraction's Methoden været brugt, da x findes i begge Equationer med samme Exponent, nemlig 1; man kunde altsaa strax, ved at subtrahere den anden Equation fra den første, eliminere x . Oplosningen vilde da blevet saaledes:

De fundne Grund

$$(1) \quad x + 12 = 2y$$

ligninger vare

$$(2) \quad y + x = 3 \times 12$$

subtraher 2 fra 1 og vi faae $12 - y = 2y - 36$

som omsat giver $48 = 3y$

og $16 = y.$

Anm. Addition's og Subtraction's Methoden giver i Almindelighed den hurtigste Elimination, og anvendes med Fordeel naar de ubekendte Størrelser ikke ere multiplicerede med hinanden, eller i forskellige Ligninger ophæiede til forskellige Potenser.

§. 35.

9de Opgave. Ved et vist Arbeide have A og B arbeidet tilsammen i 6 Dage og fortient 480 f., A og C tilsammen i 9 Dage og fortient 648 f., B og C i 15 Dage og fortient

tient 960 f.; spørges: hvad har enhver Arbejder, nemlig A, B og C fortient daglig?

Kalde vi A's daglige Fortieneste x f.

B's y

og C's z

saar have vi følgende tre Grundlæggende:

$$1) 6x + 6y = 480$$

$$2) 9x + 9z = 648$$

$$3) 15y + 15z = 960$$

Man bortskaffes ved en af de (§. 33) nævnte Metoder først den ene og derpaa den anden af de tre ubekendte Størrelser, saa at man erholder tilsidst en Equation, hvori kun er een ubekendt Størrelse. Combinations-Metoden vil vi her anvende, og finde da

$$\text{af No. 1)} x = \frac{480 - 6y}{6} = 80 - y$$

$$\text{af No. 2)} x = \frac{648 - 9z}{9} = 72 - z$$

som combinerende giver Equationen

$$\text{No. 4)} 72 - z = 80 - y.$$

Heraf findes efter de (§. 22) givne Regler

$$y = z + 8, \text{ og af No. 3 findes}$$

$$y = \frac{960 - 15z}{15} = 64 - z.$$

Disse Udtryk for y give Equationen

No. 5.

$$\text{No. 5) } x + 8 = 64 - x$$

$$2x = 56$$

$$x = 28.$$

Denne fundne Værdie af x indsat i Equationen

$$\text{No. 4 giver } y = 36,$$

og i No. 2 giver den $x = 44$.

Saaledes har A fortient 44 p. , B 36 p. , og C 28 p. daglig.

§. 36.

10de Opgave. Af to Tals givne Summa $= a$ og deres Different $= b$ at finde Tallene selv.

Oplosn. Tallene være x det større, og y det mindre (thi ere de ligestore, opløses Problemet af sig selv, da ethvert Tal er den halve Summa); vi have da af Betingelserne to Grund-*Equationer*:

$$1) \quad x + y = a$$

$$2) \quad x - y = b$$

Med *Additions Metho-*

$$\text{den (§. 33 No. 3) } 2x = a + b$$

$$x = \frac{a + b}{2} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$$

x : det største af to ubestemte Tal (hvis Sum og Difference er bekendt) findes naar til deres halve Summa adderes deres halve Difference. Indsættes nu denne Værdie for x i Ligningen No. 1, saa

$$\text{Saa have vi } \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + y = a$$

$$\text{omfat } y = a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b.$$

∴ Det mindste af de to ubekiendte Tal findes naar fra deres halve Summe subtraheres deres halve Difference.

$$\text{Ex. Sæt Summen } a = 70, \text{ Differencen } b = 12, \\ \text{Saa er } x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 35 + 6 = 41$$

$$y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = 35 - 6 = 29.$$

Anm. Ved at udtrykke de bekiendte Størrelser med Bogstaver fandtes her ved Opløsningen en almindelig Regel, som gielder for alle Tilfælde af den Art.

§. 37.

11te Opgave. Af to Rør løber Vand i eet og samme Rør; det første Rør løber i to Timer, det andet i tre Timer, og man finder i Røret 195 Potter Vand. En anden Gang løber det første Rør i fem, det andet i fire Timer, og man finder i Røret 330 Potter Vand. Der spørges: hvormange Potter Vand har ethvert Rør givet i een Time?

For at gjøre Opløsningen almindelig og til Øvelse i at regne med Bogstaver, vil vi udtrykke de bekiendte Størrelser med Bogstaver og sætte $a = 2$ Timer, $b = 3$ Timer, $m = 195$ Potter, $c = 5$ Timer, $d = 6$ Timer og $n = 330$ Pot.

Potter. Vi kalde nu de Potter Vand, det første Kør giver i een Time, x , og de Potter, det andet Kør giver, y , og vi faae følgende Fundamental-
Equationer:

$$1) ax + by = m$$

$$2) cx + dy = n$$

$$\text{Af No. 1 findes } x = \frac{m - by}{a}$$

Denne Værdie for x indsættes i No. 2 ved Substitution (§. 33), og vi faae

$$c \left(\frac{m - by}{a} \right) + dy = n$$

$$\frac{cm - bcy}{a} + dy = n$$

$$cm - bcy + ady = an$$

$$ady - bcy = an - cm$$

$$(ad - bc)y = an - cm$$

$$y = \frac{an - cm}{ad - bc}$$

Indsættes nu denne Værdie for y i Equationen

$$x = \frac{m - ay}{a}$$

$$\text{faa har vi } x = \frac{m}{a} - \frac{b}{a} \left(\frac{an - cm}{ad - bc} \right)$$

$$x = \frac{m}{a} - \left(\frac{ban - bcm}{aad - abc} \right)$$

Bringes Brøkene til eens Benævning,

$$\text{faa er } x = \frac{mad - mbc - ban + bcm}{aad - abc}$$

$$\text{reduceret er } x = \frac{mad - ban}{aad - abc}$$

$$\text{forkortet } x = \frac{md - bn}{ad - bc}$$

Indsættes nu de givne Værdier i Tal, saa

$$\text{er } y = \frac{(2 \times 330) - (5 \times 195)}{(2 \times 4) - (3 \times 5)}$$

$$y = \frac{-315}{-7} = 5$$

$$x = \frac{(4 \times 195) - (3 \times 5)}{(2 \times 4) - (3 \times 5)}$$

$$x = \frac{210}{-7} = 30$$

Det første Rør giver altsaa 30 Potter Vand hver Time, og det andet 45 Potter i samme Tid.

Løsl. Efter det fundne almindelige Udtryk for x og y lader følgende Problem sig ogsaa opløse: Man blander to Sorter Sølv A og B saaledes, at 10 Mark af A og 20 Mark af B give en Masse af 30 Mark Slødig Sølv, og saaledes 180 Lod Sølv; en anden Gang saaledes, at 30 Mark af A og 40 Mark af B give en Masse af 70 Mark $6\frac{2}{3}$ Slødig Sølv, der saaledes indeholder 440 Lod Sølv. Nu spør

spørges: hvor ledig (∴ hvor mange Lod reent Sølv Marken af hver har indeholdt) A og B har været?

Sætte vi nu A at være x ledig (∴ indeholde x Lod reent Sølv paa Marken) og B y ledig, saa have vi efter forrige Opgave, da her er $a = 10$, $b = 20$, $m = 180$, og $c = 30$, $d = 40$, $n = 440$,

$$x = \frac{md - bn}{ad - bc} = \frac{(180 \times 40) - (20 \times 440)}{(10 \times 40) - (20 \times 30)}$$

$$x = \frac{6200 - 8800}{400 - 600} = \frac{-1600}{-200}$$

$$x = 8.$$

$$\text{og } y = \frac{an - cm}{ad - bc} = \frac{(10 \times 440) - (30 \times 180)}{(10 \times 40) - (20 \times 30)}$$

$$y = \frac{4400 - 5400}{400 - 600} = \frac{-1000}{-200}$$

$$y = 5.$$

§. 38.

12te Opgave. En Bert blev spurgt, hvad Wiin han havde og hvad Prisen var paa hver Sort; han svarede han havde tre Slags og Prisen var saaledes: at to Potter af den ringeste, to Potter af den mellemste og een Pot af den bedste kostede i alt 120 Skilling; to Potter af den ringeste, tre Potter af den anden

anden og 4 Potter af den bedste tilsammen 240 Skilling; endelig ti Potter af den ringeste, fire Potter af den anden og to Potter af den tredie Slags, tilsammen 360 Skilling. Hvad koster nu Potton af hver Slags Wiin?

Lad Prisen for den ringere Sort være $= x$, for den anden $= y$ og for den tredie $= z$, saa faae vi følgende tre Grundligninger:

$$1) \quad 2x + 2y + z = 120 \text{ Skilling}$$

$$2) \quad 2x + 3y + 4z = 240$$

$$3) \quad 10x + 4y + 2z = 360$$

Af disse tre Ligninger skal nu søges een, hvor der kun er een ubekendt Størrelse. Vi vil til Øvelse her søge at opnaae dette ved Substitution (§. 33.)

Af den første Ligning søges en Værdie for x , og vi finde $x = \left(\frac{120 - 2y - z}{2} \right)$; denne substitueres i den anden Ligning, og vi

$$\text{har} \quad 2 \left(\frac{120 - 2y - z}{2} \right) + 3y + 4z = 240$$

som reduceret bliver

$$120 - 2y - z + 3y + 4z = 240$$

$$4) \quad \dots y + 3z = 120.$$

Den samme Værdie for x indsættes i den 3die Ligning
og

og vi faae $10\left(\frac{120-2y-z}{2}\right) + 4y + 2z = 360$

$$600 - 10y - 5z + 4y + 2z = 360$$

$$-6y - 3z = 360 - 600$$

5) . . . $6y + 3z = 600 - 360 = 240$

Uf No. 4 søges en Værdie for y , som findes

at være $y = 120 - 3z$;

Denne indsettes i No. 5, og vi faae

$$6(120 - 3z) + 3z = 240.$$

Vi have nu erholdt en Equation, hvori der kun er een ubekendt Størrelse, der opløses efter de givne Regler, og findes:

$$720 - 18z + 3z = 240$$

$$-15z = 240 - 720$$

$$-15z = 720 - 240 = 480$$

$$z = \frac{480}{-15} = 32 \text{ Skilling.}$$

Anm. Vedbliver man paa denne Maade, af den første af de fundne Ligninger, hvis der vare flere, at søge en Værdie for den ene ubekendte Størrelse og indsatte denne Værdie i alle de øvrige Ligninger i Stedet for samme ubekendte Størrelse, saa faaer man tilsidst en Ligning, hvori der kun er een ubekendt Størrelse, hvis Værdie da let kan findes; som her $z = 32$ Skilling.

Indsettes nu denne Værdie i Ligningen

$$y = 120 - 3z, \text{ saa er } y = 120 - 96$$

$$y = 24 \text{ Skilling, og disse Værdier for } y \text{ og } z$$

indsatte i Ligningen $x = \frac{120 - 2y - z}{2}$

giver $x = \frac{120 - 48 - 32}{2} = \frac{40}{2} = 20$ Skill.

Prisen for den ringere Sort var saaledes 20 Skilling Potten, for den anden Sort 24 Skilling, og for den tredje Sort 32 Skilling.

Tillæg. Det samste Problem kunde være højligere opløst ved Additions- og Subtractions-Metoden (§. 33).

Ligningerne var 1) $2x + 2y + z = 120$

2) $2x + 3y + 4z = 240$

3) $10x + 4y + 2z = 360$

No. 1 subtraheres fra No. 2, og vi faae

No. 4) $y + 3z = 140$

No. 2 multipliceres

med 5, og vi faae No. 5) $10x + 15y + 20z = 1200$

No. 3 subtraheres

fra 5, og vi faae No. 6) $11y + 18z = 840$

No. 4 multipliceres

med 6, og vi faae No. 7) $6y + 18z = 720$

denne subtraheres fra

No. 6, og vi faae . . . $5y = 120$

og . . . $y = 24$

§. 39.

13de Opgave. Imellem tre Regimenter, som holdte sig tapre i en Træfning, skal 1326 Rdlr. uddeles saaledes, at enhver i det Regiment, der mest udmærker sig, skal erholde een Rigsdaler, og Resten deles lige under de to andre Regimenter. Udmærker nu det første Regiment sig, da faaer enhver Mand i de andre Regimenter $\frac{1}{2}$ Rdlr.; udmærker det andet sig, da faaer hver Mand i det første og tredie kun $\frac{1}{3}$ Rdlr., og udmærker det tredie Regiment sig, da faaer hver Mand i de to første Regimenter kun $\frac{1}{4}$ Rdlr. Nu spørges: hvor stærkt var Antallet af Mandſkabet i ethvert af disse tre Regimenter?

Vi kalder Antallet i det første Regiment x , i det andet y , og i det tredie z ; saa er

$$\begin{array}{l} 1) \quad x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1326 \\ 2) \quad y + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}z = 1326 \\ 3) \quad z + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y = 1326 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{thi naar en Mand faaer} \\ \text{1 Rd. eller } \frac{1}{2} \text{ eller } \frac{1}{4} \text{ Rd.} \\ \text{saa faaer } x \text{ Mænd } x \text{ Rd.} \\ \text{eller } \frac{1}{2}x \text{ eller } \frac{1}{4}x. \end{array} \right.$$

Vil man nu ved Addition eller Subtraction (§. 37) bortſkaffe x , da maae man ſee at ſkaffe x ſamme Coefficientent i alle Equationer; man multiplicerer derfor den anden med 3 } og faaer 4) $3y + x + z = 3978$
den tredie med 4 } 5) $4z + x + y = 5304$

Nu ſubtraheres Ligningen No. 1 fra No. 4, og

No. 4 fra No. 5, og vi faae

$$\left\{ \begin{array}{l} 6) \frac{5y}{2} + \frac{1}{2}x = 2652 \\ 7) 3x - 2y = 1326 \end{array} \right.$$

For at y nu kan faae samme Coefficient i begge Equationer, multipliceres No. 6 med Tallet 4, og No. 7 med 5, og deraf fremkommer

$$\text{No. 8) } 10y + 2x = 10608$$

$$\text{og 9) } -10y + 15x = 6630$$

No. 8 og 9 adderede give denne Ligning $17x = 17238$

og $x = 1014$, som er Tallet paa det tredie Regiments Mandskab. Af

$$\text{No. 7 findes } y = \frac{3x - 1326}{2} \text{ Værdien af } x$$

$$\text{indsat bliver } y = \frac{3042 - 1326}{2} = 858; \text{ som}$$

er Antallet af det andet Regiments Mandskab.

$$\text{Af No. 1 findes } x = 1326 - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x$$

$$x = 1326 - 429 - 507$$

$$x = 490 \text{ Antallet af Mande}$$

skabet i det tredie Regiment.

Anm. At anføre flere Exempler paa enkelte Ligninger med fire eller flere ubekendte, overlades til det mundtlige Foredrag. Passende Exempler af dette Slags findes i Justitsraad Bugges mathematiske Forelæsninger og i Kahr's Veiledning i Algebra.

III. Om quadratistte saavel rene som urene Ligninger med een eller flere ubekiendte Størrelser.

§. 40.

En quadratist Ligning (§. 23) kaldes reen (fuldkommen) naar den ubekiendte Størrelse forekommer alene som Kvadrat-Tal eller i anden Potens; ureen eller forviklet, naar den ubekiendte forekommer baade som Kvadrat-Tal og Rod eller baade i første og anden Potens.

En reen quadratist Ligning behandles efter de om enkelte Ligninger forklarede Regler, indtil man faaer Kvadratet af den ubekiendte Størrelse alene paa den ene Side, og lutter bekiendte Størrelser paa den anden Side: til Ligningen faaer denne almindelige Form $x^2 = a$. Værdien af x (som ogsaa kaldes Ligningens Rod) findes da ved at udtrække Kvadrat-Roden af Størrelserne, der udgiøre begge Ligningens Sider (§. 22 No. 6) og man finder $x = \sqrt{a}$. Da Kvadrat-Roden til et positivt Kvadrat-Tal kan være baade bekræftende og nægtende (§. 15), saa bliver $x = \pm \sqrt{a}$: der gives ved Opløsningen af en quadratist Ligning stedse to Værdier for den ubekiendte Størrelse, baade en bekræftende og en nægtende, hvilket ogsaa udtrykkes saaledes, at enhver quadratist Ligning

ning

ning har to Rødder; men da alle Kvadrat-Tal, saavel af nægtende som bekræftende Roder, nødvendig maa være bekræftende (§. 14), saa følger, at naar a (de bekiendte Størrelser der udgøre den eene Side af Ligningen) er nægtende og Formen er $x = \sqrt{-a}$, da er x en umuelig Størrelse, og en Opgave, som leder til et saadant Udtryk, kan ikke opløses fordi den indeholder umulige Betingelser.

§. 41.

1ste Opgave. At finde to Tal, hvis Summa er givet at være 14, og deres Produkt 45.

Vidste man foruden Tallenes Summa tillige deres Different da fandtes Tallene let (§. 36).

Vi tænke os altsaa Differencen og kalde den z .

Værdien for denne (x) søges saaledes, vi have nemlig

det større Tal $x = 7 + \frac{1}{2}z$, og det mindre

$y = 7 - \frac{1}{2}z$ (§. 36), følgelig

$$xy = 45 = (7 + \frac{1}{2}z) \times (7 - \frac{1}{2}z)$$

$$\text{reduceret } 45 = 49 - \frac{1}{4}z^2$$

$$\frac{1}{4}z^2 = 49 - 45 = 4$$

$$z^2 = 16$$

$$z = \pm \sqrt{16}$$

$$z = \pm 4;$$

$$\text{og nu findes } x = 7 + 2 = 9$$

$$y = 7 - 2 = 5.$$

Anm. Sætte vi det givne Produkt 50 og Summen som før 14, da finde vi, ved at foretage den

hvis fremsatte Opløsning tilfødt,

$$\frac{1}{4}z^2 = 49 - 50 = -1$$

$$\text{og } z^2 = -4$$

$z = \sqrt{-4}$, som er en umuelig Størrelse, der viser, at der ikke gives to saadanne Tal, hvis Sum er 14, og hvis Produkt 50.

§. 42.

2den Opgave. At finde tvende ulige store Tal af den Bestaaffenhed, at deres Sum forholder sig til det største Tal som 7 til 5, og at Summen, multipliceret med det mindste, giver til Produkt 126.

Opløsn. Det større Tal være x , det mindre y ; vi have da efter Betingelsen

$$(x + y) : x = 7 : 5 \text{ og deraf (§. 32)}$$

$$\text{Equationen A) } 7x = 5x + 5y$$

Endvidere efter den anden Betingelse

$$\text{Equationen B) } (x + y) y = 126.$$

Af A findes $x = \frac{5y}{2}$; denne Værdi substitueres i B, og vi faae

$$\text{C) } \left(\frac{5y}{2} + y \right) y = 126$$

$$\frac{5y^2}{2} + y^2 = 126$$

$$5y^2 + 2y^2 = 252$$

$$74^2 = 252$$

$$4^2 = 36$$

$$4 = \pm \sqrt{36} = \pm 6.$$

Denne Værdi indsættes i Ligningen $x = \frac{54}{2}$

og vi finde $x = \frac{\pm 30}{2} = \pm 15.$

§. 43.

3die O p g a v e. Nogle Personer indgaae i Compagnie med hinanden for at handle; enhver indskyder 30 Gange saa mange Rigsdaler, som der ere Personer, og med 100 Rdlr. vinder enhver tre Gange saa mange Rigsdaler som der ere Personer; endelig giber $\frac{1}{3}$ af hele Gevinsten, multipliceret med $\frac{5}{38}$, Personernes Antal.

Oplosn. Personernes Antal være x , Enhvers Indskud altsaa $30x$, og den hele Kapital $30x^2$; paa 100 Rdlr. vindes $3x$, altsaa ved Proportion findes den hele Gevinst saaledes:

$$100 : 3x = 30x^2 : \frac{90x^3}{100} \text{ at være}$$

$\frac{90x^3}{100}$, forkortet $\frac{9}{10}x^3$; en ottende Deel deraf

$$= \frac{9}{80}x^3, \text{ som multipliceret med } \frac{5}{38} \text{ er } = \frac{45x^3}{2880} \text{ for}$$

forkortet $\frac{1}{8}x^3$, der efter Betingelsen er liig Personernes Antal. Grundligningen er altsaa

$\frac{1}{8}x^3 = x$ som opløst efter de givne Regler bliver $x^2 = 64$

$$x^2 = 64$$

$$x = \pm\sqrt{64} = 8.$$

Der var altsaa 8 Personer, og enhver har indskudt 240 Rdlr., i alt altsaa 1920 Rdlr.

Gevinsten $100 : 24 = 1920$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 100 \overline{) 46080} \\ \underline{4608} \\ 4608 \end{array}$$

4608 Rdlr.;

deraf en ottende Deel $4608 \times \frac{1}{8} = 576$, som multipliceret med $\frac{5}{36}$ giver $\frac{288}{36} = 8$, som var Personernes Antal.

§. 44.

En ureen quadratist Ligning kaldte vi den (§. 40), hvor den ubekiendte Størrelse forekommer baade som Quadrattal, og tillige som Rod, multipliceret med en bekiendt Coefficient. Den almindelige Form for en saadan Ligning er $x^2 + ax = b$, naar a og b betegne bekiendte, og x en ubekiendt Størrelse.

For i en saadan Ligning at finde Værdien for den ubekiendte Størrelse (som og kan kaldes Ligningens Rod), ordner man Ligningen (§. 22) saaledes:

ledes: at Quadratet af den ubekjendte Størrelse uden nogen Coefficient med Tegnet $+$ bliver det første Led i Ligningens ene Side (§. 21), og den første Potens af samme ubekjendte med dens Coefficient (der undertiden kan være en sammensat Størrelse, undertiden alene Tallet 1) det andet Led paa samme Side; men at den anden Side af Ligningen indeholder lutter bekjendte (nægtende eller bekræftende Størrelser). Til Exempel være givet Ligningen $45x^2 = 800000 - 8000x + 20x$ ordnet vil den da staae saaledes:

$$x^2 + 320x = 32000;$$

$$\text{et andet: } 3ax^2 - ab^2 + bx^2 = cx - bx$$

$$(3a + b)x^2 - cx + bx = ab^2$$

$$(3a + b)x^2 + (b - c)x = ab^2$$

$$x^2 + \frac{b - c}{3a + b}x = \frac{ab^2}{3a + b}$$

Er Ligningen saaledes ordnet, da sees ved at sammenligne den Side af Ligningen, hvor den ubekjendte Størrelse findes og hvor den almindelige Form er $x^2 + m$ (da m betyder enhver Coefficient) med det almindelige Udtryk for Quadrattallet af enhver binomist Rod (Arithm. §. 55) $a^2 + 2ab + b^2$, at der mangler det tredje Led, for at den Side kunde blive et fuldkomment Quadrattal, hvoraf Roden kunde udtrækkes. Da i ethvert fuldkomment Quadrattal af en binomist Rod det mellemste Led ($2ab$) er Produktet af Rodens

dens første Størrelse og det dobbelte af den anden ($2ab = a \times 2b$) og følgelig det tredje Leed altid Kvadratet af det halve af den Coefficient, hvormed den første Rodstørrelse i andet Leed er multipliceret: ($b^2 = \left(\frac{2b}{2}\right)^2$): saa udledes let

denne almindelige Regel: Det tredje manglende Leed i enhver uren quadratisk Ligning findes naar, efterat den er ordnet, det Halve af den Ubekiendtes Coefficient i andet Leed kvaderes og lægges til paa begge Sider.

Saaledes findes i den anførte Ligning

$$x^2 + 320x = 32000$$

det tredje Leed at være $(160)^2 = (160)^2$

$$\text{og } x^2 + 320x + 25600 = 57600$$

Er dette skeet, saa er Ligningens første Side et fuldkomment Quadrattal. Nu træffes Roden ud paa begge Sider (§. 22 No. 7), og den quadratiske Ligning forvandles til en enkelt, som i nærværende Eksempel er $x + 160 = 240$, hvoraf findes let $x = 240 - 160 = 80$.

§. 45.

Af Ligningen $x^2 + mx = b$, der forestiller alle muelige urene quadratiske Ligninger, finder man efter den i forrige §. forklarede Maade

$$x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2 = b + \frac{1}{4}m^2$$

$x^2 +$

$$x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2 = \frac{4b + m^2}{4}$$

$$x + \frac{1}{2}m = \sqrt{\frac{4b + m^2}{4}}$$

$$x = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{4b + m^2}{4}}$$

$$x = -\frac{1}{2}m \pm \frac{\sqrt{4b + m^2}}{2} \quad (\S. 16)$$

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{4b + m^2}}{2}$$

Hvis i denne anførte Form den bekiendte Størrelse $4b$ havde været nægtende og større end m^2 , saa er Værdien for den ubekiendte Størrelse umuelig eller indbildt, som for Ex.:

At finde et Tal, hvis Kvadrat, for-
 øget med 5, bliver ligestort med det
 samme Tal to Gange taget.

$$\left. \begin{array}{l} x \\ x^2 + 5 \\ x^2 + 5 = 2x \end{array} \right\}$$

Heraf faae vi efter den §. 43 forklarede Frem-
 gangsmåade: $x^2 - 2x = -5$

$$\text{og } x^2 - 2x + 1 = -5 + 1 = -4$$

$$\text{fremdeles } x - 1 = \sqrt{-4}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{-4}.$$

Da Roden af -4 er en umuelig Størrelse, saa vil denne for X fundne Værdie allene tilkiendegive, at intet saadant Tal findes som har den anførte Egenskab, og at Opøsningen af denne Opgave er aldeles umuelig.

§. 46.

4de Opgave. Af to Tals givne Summa 15 og deres Produkt 44 at finde Tallene selv.

Vi have tilforn opløst dette Problem ved at søge Tallenes Difference uden at der fremkom nogen ureen quadratisk Ligning. Nu ville vi umiddelbart søge Tallene selv. Kalde vi det ene Tal X , saa er det andet $15 - x$, og vi have, i Følge Betingelsen, følgende Grundligning:

$$x(15 - x) = 44$$

$$15x - x^2 = 44$$

$$(\S. 22 \text{ og } 44) \quad x^2 - 15x = -44$$

$$x^2 - 15x + \frac{225}{4} = \frac{225}{4} - 44$$

$$x^2 - 15x + \frac{225}{4} = \frac{225 - 176}{4}$$

$$x - \frac{15}{2} = \pm \sqrt{\frac{49}{4}}$$

$$x = \frac{15}{2} \pm \frac{7}{2} = \begin{cases} 11 \\ 4 \end{cases}$$

Dette Problem kan og opløses ved at antage to ubekendte Størrelser (vi kalde nemlig de søgte Tal X og Y) og faae da

$$A) \quad x + y = 15$$

$$B) \quad xy = 44$$

af A) $x = 15 - y$, som indsat i B

$$\text{giver D) } (15 - y)y = 44$$

deraf

$$\text{deraf } y^2 - 15y = -44$$

$$y^2 - 15y + \frac{225}{4} = \frac{225}{4} - \frac{176}{4} = \frac{49}{4}$$

$$y - \frac{15}{2} = \pm \sqrt{\frac{49}{4}}$$

$$y = \frac{15}{2} \pm \frac{7}{2}$$

Sætte vi med almindelige Tegn Summen $= s$ og Produktet $= p$, saa faae vi

$$x(s-x) = p$$

$$sx - x^2 = p$$

$$x^2 - sx = -p$$

$$x^2 - sx + \frac{1}{4}s^2 = \frac{1}{4}s^2 - p$$

$$x - \frac{1}{2}s = \pm \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$$

$$x = \frac{1}{2}s \pm \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$$

Anm. Dette Udtryk for x , sammenlignet med §. 36, viser, at to Tals halve Difference er saa stor som Kvadratroden af Fierdeparten af Summens Kvadrat mindre end Produktet: $\frac{1}{2}d = \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - p}$.

§. 47.

5er Opgave. En blev spurgt, hvormange Penge han havde; han svarede: naar Antallet af mine Rigsdalere kvadreres, og dette Kvadrat multipliceres med 5, og fra dette Produkt igien subtraheres det Firdobbelte af Rigsdalernes Antal, bliver endnu 105 Rd. tilbage. Hvor mange Rd. havde han?
Efter

Efter Betingelserne bliver Grundligningen

$$5x^2 - 4x = 105$$

$$x^2 - \frac{4}{5}x = 21$$

$$x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} = 21 + \frac{4}{25}$$

$$x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} = \frac{525 + 4}{25} = \frac{529}{25}$$

$$x - \frac{2}{5} = \sqrt{\frac{529}{25}}$$

$$x = \frac{2}{5} \pm \frac{23}{5} = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{5}{5} \\ - \frac{21}{5} \end{array} \right.$$

§. 48.

6te Opgave. At dele et givet Tal a i to saadanne Dele, at Delenes Produkt forholder sig til Summen af deres Quadrater som $m : n$.
Lad den ene søgte Deel være x , saa er den anden $a - x$, og vi have Proportionen:

$$(a - x)a : x^2 + (a - x)^2 = m : n$$

$$ax - x^2 : x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = m : n$$

deraf Grundligningen

$$nax - nx^2 = mx^2 + a^2m - 2amx + mx^2$$

ordnet

$$2mx^2 + na^2 = 2amx - anx = a^2m$$

$$(2m + n)x^2 - (2am - an)x = a^2m$$

$$x^2 - \left(\frac{2m + n}{2m + n} \right) ax = \frac{a^2m}{2m + n}$$

$$x^2 - ax = \frac{a^2m}{2m + n}$$

$$x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{a^2m}{2m + n}$$

$x =$

$$x - \frac{1}{2}a = \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{a^2m}{2m+n}}$$

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{a^2m}{2m+n}}$$

Sæt til Ex. $a = 60$; $m = 2$; $n = 5$, saa

$$\text{findes } x = 30 \pm \sqrt{900 + \frac{7200}{9}} = \sqrt{900 + 800}$$

$$x = 30 \pm \sqrt{100} = \begin{cases} 40 \\ 20 \end{cases}$$

§. 49.

7de Opgave. To Bønder A og B udsaaede i alt 24 Tønder Byg; A siger til B: naar enhver udsaaer Tønde giver mig saamange Tønder, som du har faaet, da høfter jeg 135 Tønder. Hvormange Tønder har A og hvormange har B faaet?

Lad A have faaet x Tønder, og folgelig B $24 - x$; vi have altsaa efter den anførte Betingelse Grundligningen

$$(24 - x)x = 135$$

$$24x - x^2 = 135$$

$$\text{ordnet (§. 44)} \quad x^2 - 24x = -135$$

det manglende fæd

$$(\S. 45) \text{ lægges til} \quad 12^2 = 12^2$$

$$x^2 - 24x + 144 = 144 - 135 = 9$$

$$x - 12 = \pm \sqrt{9}$$

$$x =$$

$$x = 12 \pm 3 = \begin{cases} 15 \\ 9 \end{cases}$$

A har altsaa faaet enten 15 eller 9 Tønder; i første Tilfælde har B faaet 9 og i sidste 15.

§. 50.

3de Opgave. At finde to Tal, hvis Produkt er 160 og hvis Quadraters Forskiel er 156.

Lad os kalde det ene Tal x , det andet y , og de bekiendte Størrelser $160 = a$ og $156 = b$. Vi have da $xy = a$

$$\text{og } x^2 - y^2 = b.$$

Anvende vi nu Combinations-Metoden (§. 32),

$$\text{saar finde vi } x = \frac{a}{y}$$

$$\text{af den første Ligning } x^2 = \frac{a^2}{y^2}$$

$$\text{af den anden } x^2 = y^2 + b$$

$$\text{deraf } y^2 + b = \frac{a^2}{y^2}$$

$$y^4 + by^2 = a^2$$

$$\left(\frac{1}{2}b\right)^2 = \left(\frac{1}{2}b\right)^2$$

$$y^4 + by^2 + \frac{1}{4}b^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2$$

$$y^2 + \frac{1}{2}b = \pm \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}$$

$$y^2 = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}$$

$$y = \sqrt{-\frac{1}{2}b \pm \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}b^2}}$$

Indsættes nu de givne Værdier for a og b , saa

$$\text{have vi } y = \sqrt{-78 \pm \sqrt{25600 + 6084}}$$

$$y = \sqrt{-78 \pm \sqrt{31684}}$$

$$y = \sqrt{-78 \pm 178}$$

$$y = 10.$$

$$\text{Vi havde } x = \frac{a}{y} = \frac{162}{10} = 16.$$

Anm. Ved dette Problems Opløsning fik vi en høiere Ligning $y^4 + by^2 = a^2$; men ved at sammenligne Udtrykket $y^4 + by^2$ med den almindelige Form for Quadrattallet af en binomisk Rod $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ sees let, at dette Udtryk er et ufuldkomment Quadrattal af en Rod, hvis første Led er y^2 og det andet Led $\frac{1}{2}b$. Dette giortes til et fuldkomment Quadrattal (§. 47) ved at lægge $\frac{1}{4}b^2$ til paa begge Sider; Roden blev derpaa udtrukket, og i Stedet for den tilfyneladende høiere Ligning fik vi en reen quadratisk Ligning, der let opløstes.

Paa samme Maade kunde alle høiere Ligninger, hvor den ubekjendte Størrelse forekommer i to forskiellige Potenser, dog saaledes, at dens høieste Exponent er just det dobbelte af den laveste eller som ere af denne Form $x^{2m} + ax^m = b$, reduceres til rene quadratiske Ligninger. Til Bærlse i at opløse saadanne Equationer vil jeg endnu anføre et Par Exemples.

§. 51.

9de Opgave. At finde to Tal, hvis Pro-
dukt er 16, og hvis Cubers Difference er
504.

Løstene være det større x , det mindre y ,
saa er $xy = 16$

$$x^3 - y^3 = 504.$$

Af den første Equation findes $x = \frac{16}{y}$ og x^3
 $= \frac{4096}{y^3}$; denne Værdi substitueret i den anden

Ligning (§. 33) faae vi

$$\frac{4096}{y^3} - y^3 = 504$$

$$\text{deraf } 4096 - y^6 = 504y^3$$

$$\text{ordnet } y^6 + 504y^3 = 4096$$

$$\text{tillagt } (252)^2 = (252)^2$$

$$y^6 + 504y^3 + 63504 = 67600$$

$$y^3 + 252 = \pm \sqrt{67600}$$

$$y^3 = -252 \pm 260 = \begin{cases} +8 \\ -512 \end{cases}$$

$$y = \sqrt[3]{\begin{matrix} +8 \\ -512 \end{matrix}} = \begin{cases} +2 \\ -8 \end{cases}$$

$$\text{Vi have } x = \frac{16}{y}, \text{ altsaa } = \frac{16}{-8} \text{ v. } \frac{16}{2}$$

$$\text{følgelig } x = \begin{cases} -2 \\ +8 \end{cases}$$

§. 52.

10de Opgave. Naar der gives to Tals
 Produkt $= a$ og deres Quadraters Sum
 $= b$, da at finde Tallene selv.

Det større Tal være X , det mindre Y . Vi
 have da efter Betingelsen

$$xy = a$$

$$x^2 + y^2 = b$$

af den første Ligning $x = \frac{a}{y}$ og ved Substitution

$$\left(\frac{a}{y}\right)^2 + y^2 = b$$

$$\frac{a^2}{y^2} + y^2 = b$$

$$a^2 + y^4 = by^2$$

$$y^4 - by^2 = -a^2,$$

som er den (§. 50) anførte Form, der udfyldes
 til et fuldkomment Quadrattal ved paa begge Si-
 der at tillægge $(\frac{1}{2}b)^2 = (\frac{1}{2}b)^2$

vi faae da $y^4 - by^2 + \frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}b^2 - a^2$

$$\text{og } y^2 - \frac{1}{2}b = \pm \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - a^2}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - a^2}}$$

$$\text{følgelig } x = \frac{a}{y} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - a^2}}$$

Satte

Sætte vi $a = 24$; $b = 52$

$$\text{saar er } y = \pm \sqrt{26 \pm \sqrt{676 - 576}}$$

$$y = \pm \sqrt{26 \pm \sqrt{100}}$$

$$y = \pm \sqrt{36} \text{ eller } \pm \sqrt{16}$$

$$y = \pm \begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}$$

$$x = \frac{24}{\pm 6} \text{ eller } \frac{24}{\pm 4} = \pm \begin{cases} 6 \\ 4 \end{cases}$$

IV. Om ubestemte Problemer, i hvilke de ubekjendte Størrelser skal udtrykkes ved hele bekræftende Tal.

§. 53.

Et Problem kaldes ubestemt, naar det indeholder flere ubekjendte Størrelser end der af dets Betingelser kan udledes Ligninger; og et saadant Problem kan da modtage utallige Opløsninger. For Ex. at finde to Tal, som samlede udgøre 12.

Der findes to ubekjendte Størrelser x og y , men kun een Grundligning, nemlig

$$x + y = 12$$

$$x = 12 - y$$

Man antager i dette Tilfælde en vilkaarlig Værdie for den ene ubekiendte, som her $y = 1$, og vi faae da $x = 12 - 1 = 11$.

Antages $y = 2$, findes $x = 10$, og saaledes naar $y = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$, findes $x = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 4, 2, 1$. Saaledes have vi nu for dette Problem elleve Oplosninger; flere ere ikke muelige, naar de ubekiendte to Tal skal være hele og bekræftende. Ere derimod enten begge disse Betingelser eller og kun een af dem udeladte, da bliver Oplosningernes Antal uendeligt.

Anm. Udsørlig at forklare den egne Oplosnings-Methode og de analytiske Kunstgreb, som bruges for at finde Værdierne af de ubekiendte Størrelser i ubestemte Problemer, hvor det er bestemt, at de søgte Størrelser skal være hele og positive Tal, er her efter min Plan ikke Sted til; kun for at give et Begreb derom vil jeg anføre et Par Exempler, og derved vise de vigtigste Regler. Udsørligt og med megen Tødelighed findes disse Problemers Oplosning udviklet i Kahr's Veiledning i Algebra. Kjøbenh. 1802.

§. 54.

1ste Opgave. En Myntmester har tre Slags Guld, 15, 11 og 9 lødige; deraf vil han forfærdige 48 Lod 13 lødig Guld. Hvor mange Lod skal han tage af hver Slags?

Lod

Lad ham af første Slags tage x , af andet y , og af tredje z Lod, saa kan kun udledes to Ligninger, nemlig

$$1) \ x + y + z = 48$$

$$2) \ 15x + 11y + 9z = 48 \times 13 = 624$$

Da der er tre ubekendte Størrelser og kun to Ligninger, er Problemet ubestemt (§. 53).

Ved Subtractions-Metoden (§. 33) naar Ligningen No. 1) multipliceres med Tallet 9, og derpaa subtraheres fra No. 2,

$$\text{findes } 3) \ 9x + 9y + 9z = 432$$

$$\text{og } 4) \ 6x + 2y = 192$$

$$\text{deraf } 5) \ y = 96 - 3x.$$

For x antages nu en vilkaarlig Værdie; men skal saavel x som y og z blive hele og bekræftende Tal, da er 24 det mindste og 32 det høieste Tal man kan antage for x ; thi sættes $x = 23$, bliver, efter Ligning 4), $y = 27$, som er imod Ligningen 1), og saaledes ved enhver ringere Værdie for x ; sættes derimod $x = 33$, bliver y , efter Ligningen 4), $= -3$ imod Betingelsen. Følgende Værdier kan altsaa finde Sted for x , y , z , hvorved alle Betingelser opfyldes.

$$x = 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32$$

$$y = 24, 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0$$

$$z = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$$

§. 55.

2den Opgave. En Kjøbmand skylder til en anden 100 Rdlr; han vil afdrage denne Gæld ved at levere tvende Slags Klæde. Alenen af det første Slags koster 7 Rdlr. og af det andet 9 Rdlr. Hvor mange Alen skal han levere af hver Slags?

Efter Betingelsen er Grundligningen

$$7x + 9y = 100, \text{ deraf}$$

$$y = \frac{100 - 7x}{9}, \text{ og naar Divisionen}$$

$$\text{med 9 gøres virkelig } y = 11 \frac{-7x + 1}{9}$$

$$\text{Skal nu } y \text{ være et heelt Tal, maae } \frac{-7x + 1}{9}$$

ogsaa være et heelt Tal; man sætte det $= A$,

$$\text{og have da } A = \frac{-7x + 1}{9} \text{ og } x = \frac{9A + 1}{7}$$

$$= A + \frac{2A + 1}{7} \text{ (A). Skal } x \text{ være et heelt}$$

$$\text{Tal, maae } \frac{2A + 1}{7} \text{ ogsaa være et andet heelt}$$

$$\text{Tal; man sætte nu } \frac{2A + 1}{7} = B, \text{ saa er}$$

$$A = \frac{7B - 1}{2} = 3B + \frac{B - 1}{2} \text{ (B). Frem-$$

deles-

deles sætter man $\frac{B-1}{2}$ (der ogsaa maae være et heelt Tal) $= C$ og $B = 2C + 1$. Denne Værdie substitueres i Ligningen B, saa er $A = 2C + 3$; denne Værdie indsættes i Ligningen A, og vi faae $x = 9C + 4$. Skal nu x og y blive bekræftende og hele Tal, saa gives for C kun to Værdier 0 og 1, da

$$\text{i første Tilfælde } \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases}$$

i andet $\begin{cases} x = 13 \\ y = 1 \end{cases}$ som er de to eeneste Op-
 løsninger, Opgaven kan modtage; thi antages C
 nægtende, bliver X ogsaa nægtende imod Betin-
 gelsen; antages den $= 2$, bliver $x = 22$ og
 $y = -6$, som ogsaa er imod det antagne.

Anm. At fremsætte flere Exempler paa ubestemte
 Problemer enten af dette Slags, eller med quadra-
 tiske Ligninger, troer jeg efter min Plan ikke pas-
 sende; kun de Ligninger, hvor den ubekendte Stør-
 relse forekommer som Exponent, og som ikke uden
 ved Logarithmer kan opløses, skal, naar Logarith-
 mernes Theorie er fremsat, fortellig omtales.

V. Videre Udførelse af Læren om geometriske Forhold og Proportioner.

(Se Arithmet. §. 64-77.)

§. 56.

Er fire Størrelser (a, b, c, d) geometrisk proportionale $\therefore a : b = c : d$, saa forholder ogsaa

1) Summen eller Differencen af de eenstaaende Lede sig, som et foregaaende Led til et efterfølgende $\therefore a \pm c : b \pm d = a : b = c : d$.

Beviis. Efter Betingelser er $a \times d = b \times c$ (Arithm. §. 71), folgelig $a \times d + c \times d = b \times c + c \times d$ $\therefore (a + c) d = (b + d) c$, folgelig (Arithm. §. 71. Till. 2) $a + c : b + d = c : d = a : b$.

Anm. For Differencen føres Beviset paa samme Maade, som for Summen,

2) Summen eller Differencen af de to første og de to sidste Led, forholde sig som de to eenstaaende (homologe) Led $\therefore a \pm b : c \pm d = a : c = b : d$.

Beviis. Efter Betingelsen er $a \times d = b \times c$, folgelig $a \times d + b \times d = b \times c + b \times d$ $\therefore (a + b) d = (c + d) b$, altsaa (Arithm. §. 71. Till. 2) $a + b : c + d = b : d = a : c$.

Anm. I begge disse Sætninger er Beviset ført ved at multiplicere begge de frembragte Produkter med

med et tredie, hvis tvende Faktorer ere tagne af de to Produkter, som ved Proportionen frembrages, nemlig een af hvert.

§. 57.

Ere i to Proportioner Exponenterne lige store, saa faaer man en rigtig Proportion, naar Ledene efter Ordenen adderes til eller subtraheres fra hinanden.

$$\begin{array}{l} \text{Ex. Er } a : ma = b : mb \\ \quad \quad c : mc = d : md \end{array}$$

$$\text{saa er } a + c : ma + mc = b + d : mb + md$$

$$\text{og } a - c : ma - mc = b - d : mb - md$$

Beviis. I enhver af de givne Proportioner antages $m = m$, som er Exponenten; men den fundne Proportion kan forandret udtrækkes saaledes:

$$a + c : m(a + c) = (b + d) : m(b + d).$$

Exponenterne blive da ogsaa her $m = m$, og saaledes Proportionen rigtig.

$$\text{Till. Er } a : b = e : d$$

$$c : f = e : d$$

$$g : h = e : d$$

$$\text{saa er } a + c + g : b + f + h = e : d;$$

$$\text{thi (§. 56) } a + c : b + f = 2e : 2d = e : d$$

$$\text{og } g : h = e : d$$

$$\text{følgelig } a + c + g : b + f + h = 2e : 2d = e : d.$$

§. 58.

Vil man angive en Størrelses Forhold til en anden, f. Ex. en Ducats til en Rigsort, saa kan man enten gøre det ligesom (med eet) eller man angiver først Ducats Forhold til en Rigsdaler, og derpaa Rigsdalers Forhold til en Rigsort. Saaledes Ducat : Rigsdaler $\equiv 1 : 2$

$$\text{Rigsdaler : Rigsort} \equiv 1 : 4$$

$$\text{Altsaa Ducat : Rigsort} \equiv 1 : 8.$$

Man siger da, at Forholdet mellem Ducaten og Rigsorten er sammensat af Forholdene mellem Ducaten og Rigsdaleren, og mellem Rigsdaleren og Rigsorten, eller af Forholdene $1 : 2$ og $1 : 4$.

Exponenten i det sammensatte Forhold bliver stedse Produktet af Exponenterne i de enkelte Forholde.

$$\text{Ex. } 24 : 3 = \left\{ \begin{array}{l} 8 : 2 \\ 3 : 1\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

hvor Exponenten i Forholdet $24 : 3$ er Produktet af Exponenterne i Forholdene $8 : 2$ og $3 : 1\frac{1}{2}$. Skriftlig udtrykkes det som det nylig anførte eller og saaledes: $24 : 3 = (8 : 2) \div (3 : 1\frac{1}{2})$.

Et sammensat Forhold (ratio composita) kan undertiden være sammensat af tre, fire, og flere Forhold.

Er et Forhold mellem to Størrelser sammensat af to andre lige store Forhold, da siges det sammensatte Forhold at være dobbelt saa høit (ratio duplicata) som ethvert af de enkelte.

Ex. 36 er i et dobbelt saa høit Forhold til 4, som $6 : 2$ og $216 : 8$ i et tregange saa høit Forhold (ratio triplicata).

Till. 1. Quadrattal ere i et dobbelt og Kubital i et tredobbelt Forhold af deres Rødder; Quadratrødder derimod i et halvt saa høit (ratio subduplicata og Kubikrødder i et trediepart saa høit (subtriplicata) Forhold til hinanden, som deres Quadrat og Kubital.

Till. 2. Ophæies derfor alle fire Ledene i en geometrisk Proportion til den samme Potens, eller udtrækkes af dem alle den samme Rod, saa ere disse Potenser og Rødder ogsaa proportionale.

Ex. Er $a : b = c : d$

saa er $a^n : b^n = c^n : d^n$

thi Forholdet $a^n : b^n$ er n gange saa høit som Forholdet $a : b$, og ligeledes $c^n : d^n$ n gange saa høit som $c : d$.

Saa samme Maade indsees, at $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

Ex. 3. Forholdet mellem to Produkter er sammensat af Forholdet mellem deres Faktorer.

Ex. Er $mp : nq = a : c$

saa er $(m : n) + (p : q) = a : c$

IV. Om arithmetiske Progressioner eller Tal-Rækker.

§. 59.

En fortsat sammenhængende arithmetisk Proportion (Arithmet. §. 65) kaldes en arithmetisk Progression (progressio arithmetica); den er vokende eller aftagende, eftersom Ledene tage til eller af.

Ex. paa en vokende: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

aftagende: 17, 14, 11, 8, 5, 2, 1.

Anm. Bore almindelige Tal i deres naturlige Orden udgjøre en vokende arithmetisk Tal-Række: 1, 2, 3, 4 &c.

Ex. Kalde vi i en arithmetisk Progression det første Led a , Ledenes Antal n , det sidste Led

Leed a , og Ledenes Forskiel (som ogs kaldes Forholdsnavn) d , saa er den almindelige Form for en arithmetisk Progression følgende:

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + 3d, \quad a + 4d, \dots, a + (n-1)d$$

Anm. De overskrevne Tal kaldes Angivere (indices), og tilskienbegive Ledets Tal i Rækken. Tæges nu Merke til disse Angivere, saa sees, at det andet Leed er $a + d$, det tredje Leed $a + 2d$, og saaledes ethvert Leed i Rækken at bestaae af det første Leed a og Differencen taget saa mange Gange, som Ledenes Antal mindre end een. F. Ex: Det femte Leed at være $= a + 4d$, og saaledes det sidste eller n Leed $= a + (n-1)d$. En af n Leed bestaaende Række kunde altsaa saaledes udtrykkes:

$$a, \quad a + d, \quad a + 2d, \quad a + (n-3)d, \quad a + (n-2)d, \quad a + (n-1)d$$

§. 60.

Sættelse. I enhver arithmetisk Række er Summen af de to yderste Leed $a + u$ ligestor med Summen af ethvert Par Leed i Rækken, der staae begge ligelangt fra de yderste, og, i Tilfælde at Ledenes Antal er ulige, ligestor med det dobbelte af det midterste Leed.

Beviis. De givne Leed i Rækken være P og Q , deres Afstand, nemlig P fra første Leed og Q fra sidste Leed, være r , saa er efter den almindelige Form (§. 59) $P = a + (r-1)d$ og $Q =$

$u - (r - 1)d$, følgelig $P + Q = a + (r - 1)d + u - (r - 1)d = a + u$. Ved et ulige Antal Leed lad M være det mellemste, som da er ligelangt fra det første og sidste, og følgelig $M + M = a + (r - 1)d + u - (r - 1)d = a + u$.

§. 61.

1ste Opgave. At finde Summen af en arithmetisk Progression.

Opløs. Summen af det første og sidste Leed multipliceres med Ledenes halve Antal; kaldes altsaa Summen S , saa er efter de anførte Benævnelser $S = \frac{1}{2}n(a + u)$.

Bevis I. Er n Ledenes Antal, saa er $\frac{1}{2}n$ Antallet af Parrene, men ethvert Par er lig $a + u$ (§. 60), altsaa $\frac{1}{2}n$ Par lig $\frac{1}{2}n(a + u)$.

Bevis II. Er ethvert Par Leed $= a + u$, saa kan man forestille sig ethvert enkelt Leed $= \frac{a + u}{2}$, følgelig, naar den er n Leed, den hele

$$\text{Summa} = n \times \frac{a + u}{2} = \frac{1}{2}n(a + u).$$

Till. 1. Indsætte vi i Udtrykket $s = \frac{1}{2}n(a + u)$ Bæddis for $u = a + (n - 1)d$ (§. 59), saa faae

$$\text{vi } s = \frac{1}{2}n (a + a + (n - 1)d) = \frac{1}{2}n (2a + (n - 1)d).$$

Ex. 2. Disse for n og s fundne Værdier ere Grundligninger i den hele Lære om arithmetiske Progressioner; da nu stedse to ubekendte Størrelser ved to Ligninger kan bestemmes, saa behøves af disse fem Størrelser, a , d , n , u og s , kun de tre at være givne, da de to manglende ved de anførte Ligninger kan findes. Lad f. Ex. s , a og u være givne; man skal finde n og d .

$$\text{Vi have } s = \frac{1}{2}n (a + u)$$

$$\text{deraf } \frac{2s}{a + u} = n$$

$$\text{og da } u = a + (n - 1)d, \text{ saa er}$$

$$\frac{u - a}{n - 1} = d; \text{ indsættes heri den for } n$$

$$\text{fundne Værdie, faae vi } d = \frac{u - a}{\frac{2s}{a + u} - 1} =$$

$$\frac{u^2 - a^2}{2s - (a + u)}$$

Anm. Da af fem Størrelser tre kan tages paa ti forskellige Maader, saa finder her ti forskellige Opgaver Sted, hvori stedse to Størrelser bestemmes ved de tre andre. Man erholder ved disse ti Opløsninger tyve forskellige Værdier, som for enhver af

de fem Størrelser giver fire forskellige Bestemmelser.
Disse tyve Former, hvis Udvikling overlades til det
mundtlige Foredrag, kunde i en Tabel saaledes ordnes:

| givne Størrelser | øgte | Formerne. |
|---------------------|------|---|
| $u \quad d \quad n$ | | $a = u - d - dn = u - (n-1)d.$ |
| $u \quad n \quad s$ | a | $a = \frac{2s}{n} - u$ |
| $n \quad d \quad s$ | | $a = \frac{1}{2}d \pm \sqrt{u^2 \pm ud \pm \frac{1}{4}d^2 - 2ds}$ |
| $d \quad n \quad s$ | | $a = \frac{2s \pm dn - dn^2}{2n}$ |
| $a \quad u \quad n$ | | $d = \frac{u - a}{n - 1}$ |
| $a \quad n \quad s$ | | $d = \frac{2s - 2an}{n^2 - n}$ |
| $a \quad u \quad s$ | d | $d = \frac{u^2 - a^2}{2s - (a + u)}$ |
| $u \quad n \quad s$ | | $d = \frac{2un - 2s}{n^2 - n}$ |
| $a \quad u \quad d$ | | $n = 1 + \frac{u - a}{d}$ |
| $a \quad u \quad s$ | | $n = \frac{2s}{a + u}$ |
| $a \quad d \quad s$ | n | $n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} \pm \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} \pm \frac{1}{4}}$ |
| $u \quad d \quad s$ | | $n = \frac{1}{2} + \frac{u}{d} \pm \sqrt{\frac{u^2}{d^2} \pm \frac{u}{d} \pm \frac{1}{4} - \frac{2s}{d}}$ |

| givne Størrelser | føgte | Formerne. |
|---------------------|-------|--|
| $a \ d \ n$ | | $u = a + (n - 1)d$ |
| $a \ n \ s$ | | $u = \frac{2s}{n} - a$ |
| $a \ d \ s$ | u | $u = -\frac{1}{2}d + \sqrt{2ds + a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2}$ |
| $d \ n \ s$ | | $u = \frac{s}{n} + \frac{dn - d}{2}$ |
| <hr/> | | |
| $a \ u \ n$ | | $s = \frac{1}{2}n (a + u) = \frac{an + un}{2}$ |
| $a \ d \ n$ | s | $s = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$ |
| $a \ d \ u$ | | $s = \frac{a + u}{2} + \frac{u^2 - a^2}{2d}$ |
| $u \ d \ n$ | | $s = \frac{2un + dn - dn^2}{2}$ |

§. 62.

2den Opgave. 1) At finde Summen af alle naturlige Tal fra 1 til 100.

Her er $a = 1$. $u = n = 100$, følgelig
 efter Formen $s = (a + u) \times \frac{1}{2}n$. $s = (1 + 100)$
 $\times \frac{1}{2}n = \frac{n \times (n + 1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2}$
 $= \frac{10100}{2} = 5050.$

2) At finde det nte ulige Tal fra 1 og
 Summen af de nførste ulige Tal.

Her er $a \equiv 1$, $d \equiv 2$, følgelig $u \equiv 1 + (n - 1)2 \equiv 2n - 1$. og $s \equiv (1 + 2n - 1) \times \frac{1}{2}n \equiv 2n \times \frac{1}{2}n \equiv n^2$. 3: Kvadrat: Tallet af Ledenes Antal, hvoraf Rækken af ulige Tal fra 1 bestod, er liig Summen af den hele Række. Saaledes f. Ex. $1 + 3 \equiv 2^2$. $1 + 3 + 5 \equiv 3^2$.

Ell. 1. Vi fandt det n te ulige Tal $u \equiv 2n - 1$; altsaa det $(n + 1)$ te $\equiv 2n + 1$ (da Differencen i en Række af de naturlige ulige Tal er 2) og det $(n - 1)$ te $\equiv 2n - 3$.

Ell. 2. Er Kvadratet af et heelt Tal n^2 givet, da findes Kvadratet af det næstfølgende heelt Tal $(n + 1)^2$, naar man til det givne Kvadrat n^2 adderer det næstfølgende ulige Tal; thi Differencen imellem n^2 og $(n + 1)^2$ er $2n + 1$ (Arithm. §. 55. Ell. 3), men det $(n + 1)$ te ulige Tal er (Ell. 1) $\equiv 2n + 1$.

Ex. Lad være $n \equiv 112$, saa er det ~~112~~ $(n + 1)^{\text{te}} \equiv$ ulige Tal $2 \times 112 + 1 \equiv 225$. Ved man nu, at $112^2 \equiv 12544$, saa er $113^2 \equiv 12544 + 225 \equiv 12769$.

Anm. Herefter kan let forfærdiges Tabeller over Quadrattal.

§. 63.

3die Opgave. For at grave en Brønd accorderes saaledes, at den første Fods Dybde betaa

betales med 3 Mk., den anden med 6 Mk., den tredje med 9 Mk. o. s. v. Naar nu Brønden bliver 32 Fod dyb, hvad koster den da at grave?

Oplos. Det sees let, at det er den fundne Form for s , som her skal bruges. Var Spørgsmaalet om, hvad den sidste God kostede at grave, skulde Formen for u være benyttet. Her er $a = d = 3$, $n = 32$; altsaa efter den anførte Form $u = a + (n - 1)a = na$, følgelig $s = (a + na) \times \frac{1}{2}n = (n + 1)a \times \frac{1}{2}n = 33 \times 3 \times 16 \text{ Mark} = 1584 \text{ Mark} = 264 \text{ Rdlr.}$, som er hvad den kostede at grave.

§. 64.

4de Opgave. Imellem to givne Størrelser a og u at finde et vist Antal $= m$ af arithmetiske Mellemproportional-Tal.

Oplosn. Det første og sidste Led af en bestemt Række ere her givne a og u , Ledenes Antal ligeledes, thi det bliver her $m + 2$ (de søgte Tal ere $= m$, og dertil lægges det første og sidste Led); altsaa er $n = m + 2$ og $n - 1 = m + 1$; Ledenes Forskiel d er det som søges: denne findes efter Formen $d = \frac{u - a}{n - 1}$ (§. 62), naar istedet for $n - 1$ substitueres den derfor fundne Værdi $m + 1$, og vi faar $d = \frac{u - a}{m + 1}$. Ex.

Ex. , Imellem 5 og 59 søges sex arithmetiske Mellemproportional-Tal, saa er $a = 5$, $u = 59$, $m = 6$, og vi finde $d = \frac{59 - 5}{6 + 1} = \frac{54}{7} = 7\frac{5}{7}$, og Progressionen bliver 5. $12\frac{5}{7}$. $20\frac{2}{7}$. $28\frac{1}{7}$. $35\frac{4}{7}$. $43\frac{1}{7}$. $51\frac{2}{7}$. 59.

Anm. Læren om arithmetiske Tal-Rækker er i det hele ikke af megen Vigtighed, og heller ikke gøres der synderlig Anvendelse deraf i det følgende.

VII. Om geometriske Progressioner og Tal-Rækker.

§. 65.

Bor II. En foresat sammenhængende geometrisk Proportion (Arithmet. §. 70) kaldes en geometrisk Progression eller Tal-Række; den kan være voksende eller aftagende, eftersom det følgende Led er et Produkt eller Quotient af det næst foregaaende og Forholds-Exponenten, (det Tal, som angiver hvormange Gange det efterfølgende Led er større eller mindre end det foregaaende).

Lill. 1. Kaldes det første Led i saadan en Række a , det sidste Led u , Forholds-Exponenten m , da er den almindelige Form for en saadan Række følgende:

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ a & am \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 a & am & am^2 & am^3 & am^4 & am^5 \\
 n-2 & n-1 & n & & & \\
 am^{n-3} & am^{n-2} & am^{n-1} & & &
 \end{array}$$

Nm. De ovenskrevne Tal kaldes Angivere, og vilse Ledenes Antal.

Lill. 2. Ved at betragte den anførte Form, sees, at hvert Led i Rækken er et Produkt af det første Led og Forholdsnavnet ophøiet til en Potens, hvis Exponent er Ledets Tal mindre end een; saaledes er fjerde Led am^3 , femte Led am^4 , og det almindelige eller n te Led $a = am^{n-1}$.

Lill. 3. Ere N og R to virkelige Led i en saadan Række; hvis Afstand fra hinanden er r , saa er $R = Nm^{r-1}$, og folgelig $N = \frac{R}{m^{r-1}}$.

Lill. 4. Fire Led i en saadan Række, P . Q . N . R , hvoraf de to og to have samme Afstand r fra hinanden, udgiøre en geometrisk Proportion; thi (Lill. 3) $Q = Pm^{r-1}$ og $R = Nm^{r-1}$; folgelig $P : Pm^{r-1} = N : Nm^{r-1}$; som er en rigtig geometrisk Proportion (Arithm. §. 70.)

Lill. 5. Er m et heelt Tal eller en uegentlig Brøk, saa faaer man en vøgende Række; er m derimod en egentlig Brøk, faaer man en aftagende

Lill.

Exill. 6. Divideres ethvert Leed i en saadan Række med det første Leed eller a , faaer man stedse en Række, hvis første Leed er 1, og de øvrige Leed Potenser af Forholdstallet m . Den anførte Form a, am, am^2, am^3, am^4 forvandles da til følgende: $1, m, m^2, m^3, m^4$ &c.

§. 66.

Læresætning. I enhver geometrisk Progression er Produktet af første og sidste Leed au ligestort med Produktet af tvende fra hinne liges langt værend Leed PQ , og, naar Ledenes Antal i Rækken ere ulige, ligestort med Quadraten af det midterste Leed M .

Bevist. Formedelt den lige Afstand er $a : P = Q : u$ (§. 65 Exill. 4.) og $a : M = M : u$, følgelig $au = PQ$ og $au = M^2$ (Arithm. §. 71 og Exill.)

Andersledes. Den lige Afstand af P og Q fra a og u være r , saa er $P = a \times m^{r-1}$ og

$$Q = \frac{u}{m^{r-1}} \quad (\text{§. 65 Exill. 3}), \text{ følgelig } P \times Q$$

$$= a \times m^{r-1} \times \frac{u}{m^{r-1}} = au.$$

§. 67.

1ste Opgave. At finde Summen (som vi vil kalde s) af alle Ledene i en geometrisk Progression.

Opløs. Efter den anførte Form (§. 64 Till. 1) er $s = a + am + am^2 + am^3 + am^{n-2} + am^{n-1}$; multipliceres nu begge Sider af Ligningen med m , saa er $ms = am + am^2 + am^3 + am^{n-2} + am^{n-1} + am^n$; subtraheres den øverste Ligning fra den nederste, saaer vi $ms - s = am^n - a$

$$\text{og } (m-1)s = am^n - a$$

$$s = \frac{am^n - a}{m-1} = \frac{(m^n-1)a}{m-1}$$

$$\text{Nu er } u = am^{n-1}$$

$$\text{og } mu = am^n$$

indsættes nu i Værdien for s , mu for am^n , saa

$$\text{er } s = \frac{mu - a}{m - 1}.$$

Anm. Efter Formen $s = \frac{am^n - a}{m-1}$ findes

Summen uden at det sidste Led eller u er bekiendt; er derimod u (det sidste Led) bekiendt, bruges be-

quemtest Formen $s = \frac{mu - a}{m-1}$.

Till. 1. Efter denne Form findes Summen saavel af voksende som aftagende Rækker. Lad
være

være f. Ex. $a = 1$, $m = 3$ og $u = 729$, og
altsaa Rækken voksende, saa er $s = \frac{3 \times 729 - 1}{3 - 1}$

$$= \frac{2187 - 1}{2} = \frac{2186}{2} = 1093. \text{ Var der}$$

imod $a = 629$, $u = 1$, $m = \frac{1}{3}$, og saaledes
Rækken aftagende, saa er $s = \frac{\frac{1}{3} \times 1 - 729}{\frac{1}{3} - 1}$

$$= -\frac{2186}{\frac{2}{3}} = -\frac{2186}{\frac{2}{3}} = + 1093.$$

Lill. 2. Til Øvelse og Anvendelse af den fundne
Form for Summen af en geometrisk Talrække kan
søges Antallet af de Korn, som Opfinderen af
Skakspillet siges at have udbedet sig til Belønning;
nemlig eet Korn for det første Tabl paa Skakbrets-
tet, 2 for det andet, 4 for det tredje o. s. fr. for
ethvert følgende af de 64 Tabl dobbelt, saa, maake
som for det foregaaende; her er $a = 1$, $m = 2$,

$$n = 64, \text{ og } s = \frac{am^n - a}{m - 1} = \frac{2^{64} - 1}{1} =$$

$2^{64} - 1$, som, naar det enten opsøges i Tavler eller
beregnes ved Logarithmier (hvorom i det Følgende),
udgør den uhyre Summe 1844674407379551616,
der igien kan udregnes i Tønder og Skieppet, naar
man blot veed, hvor mange Korn der indeholdes i
et vist Maal.

§. 68.

Ligesom ved den arithmetiske Progression (§. 61) har man ogsaa her fem Størrelser og to Fundamentalsligninger, nemlig $u = am^{n-1}$ og $s =$

$$\frac{am^n - a}{m - 1} = \frac{mu - a}{m - 1}, \text{ altsaa kan ogsaa her}$$

forekomme ti Opgaver af tre givne at finde to ubekendte Størrelser. Saaledes findes af Ligningen

$$u = am^{n-1}, \text{ at } m = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} \text{ og af Ligningen}$$

$$s = \frac{(m^n - 1)a}{m - 1}, \text{ findes } a = \frac{(m - 1)s}{m^n - 1}; \text{ men}$$

disse for m og a fundne Værdier vilde ved de hidtil lærte Regnings-Metoder meget vanskelig kunne udtrykkes i Tal, naar n er et nogenlunde høit Tal.

Lill. Ligesom i den arithmetiske Progression findes her ogsaa 20 Former for de fem Størrelser, der, ligesom de for den arithmetiske, kunde ordnes i en Table; men da nogle af dem ere meget sammensatte, og nogle ikke kan findes uden ved høiere Ligninger (hvorom jeg ikke troer det passende her at handle), vil jeg ikke hense til dem, men kun ved et Par Exempler vise deres Anvendelse.

§. 69.

2den Opgave. En indsætter i Lallotteriet 8 Sk., og foretager sig at fordobble sin Indsats i ti Trækninger; nu spørges: hvor meget maae han indsætte tiende Gang?

Oplosn. Her er $a = 8$, $m = 2$, og $n = 10$; efter Formen $u = am^n - 1$ findes her hans sidste Indsats eller $u = 8 \times 2^9 = 8 \times 512 = 4096$ Sk. $= 42$ Rd. 64 Sk.

Anm. Flere Exempler kan let tilføjes ved det mundtlige Foredrag; f. Ex.: naar den første Rude i et Vindue, der har 16 Ruder, koster 4 Sk., og det stedse fordobles, hvad koster den sidste, og hvad koster hele Vinduet, o. a. f.

§. 70.

3die Opgave. Imellem tvende givne Størrelser a og u at finde et vist Antal $= r$ Mellemproportional-Tal i en geometrisk Række.

Oplosn. Man søger først Forholdsnavnet i Rækken efter den (§. 68) anførte Form $m = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$; thi a og n ere givne, n er ogsaa bekiendt, thi Ledene i hele Rækken maae blive de søgte Mellemproportional-Tal tihigemed det første og sidste (o: naar der søgtes tre Mellemproportional-Tal, bliver $n = 5$), og saaledes $n = r + 2$, folgelig $n - 1 = r + 1$, altsaa $m = \sqrt[r+1]{\frac{u}{a}}$. Lad

Lad f. Ex. 1) forlanges at finde tre Mellemproportional, Tal imellem 10 og 160. Her er $a = 10$, $u = 160$, og $r = 3$; man finder da $m = \sqrt[4]{\frac{160}{10}}$, $m = 2$, og Progressionen findes at være $10 - 20 - 40 - 80 - 160$.

2) Imellem 1 og 2 at indsatte elleve Leed saaledes, at alle tretten Leed udgøre en geometrisk Progression. Her er $a = 1$, $u = 2$ og $r = 11$; altsaa $m = \sqrt[11]{2} = \sqrt[11]{2}$. (Denne Rod kan ikke findes uden ved Logarithmer, hvorefter nu strax skal handles).

§. 71.

4de Opgave. At finde Summen af en uendelig Række, hvis Forholdsnavn er en egentlig Brøk.

Opløsning. Lad det første Leed være a , Forholdsnavnet den egentlige Brøk $\frac{b}{c}$, saa er

$$1) s = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} + \dots \text{uendelig,}$$

multipliseres nu med $\frac{b}{c}$ paa begge Sider har vi

$$2) \frac{b}{c} s = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} + \frac{ab^5}{c^5} + \dots \text{naar}$$

denne Ligning subtraheres fra første findes

$$s - \frac{b}{c} s = \left(1 - \frac{b}{c}\right) s = a$$

$$s = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}} = \frac{ac}{c - b}$$

Ex. 1. Være Tegnene i Rækken afvekslende, saa bliver 1) $s = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} \dots$ uendel.

$$2) \frac{b}{c} s = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} \dots \text{uendelig.}$$

1 og 2 adderes, saa er $\left(1 + \frac{b}{c}\right) s = a$ og

$$s = \frac{ac}{c + b}$$

Anm. De her for uendelige Rækker fundne Summer kunde ogsaa uledes af den almindelige Form

$$s = \frac{mu - a}{m - 1} \text{ (§. 67), kun at der bemærkes, at } mu = 0$$

(da det sidste Led er en uendelig lille Størrelse), og at, naar Ledene i Rækken have afvekslende Tegn, man anseer det som to Rækker og søger Summen af den positive og negative Række hver for sig, og derpaa subtraherer dem fra hinanden.

Ex. 2. Sættes det første Led i en saadan

$$\text{Række} = \text{Forholdstallet} = \frac{1}{x}, \text{ da er } s =$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \dots \text{uendelig og } s =$$

$$\frac{\frac{1}{x}}{1-x} = \frac{1}{x-1}, \text{ og for afvejlende Tegn } s =$$

$$\frac{1}{x+1} \text{ (Till. 1.)}$$

Ann. Sammenlignes dette Udtryk med den almindelige Form, saa sees, at det skulde hedde for enhver Progression $s = (1-u) \frac{1}{x-1}$. Men ved en uendelig Række bliver u en uendelig lille Størrelse $= 0$; Coefficienten $1 - 0$ bliver saaledes $= 1$, og bortfalder.

Till. 3. Paa Grund heraf lade Talrækker af denne Art sig let summere; f. Ex. denne Række: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ Her er $x = 2$.

$$a = \frac{1}{32}, \text{ og } s = (1 - \frac{1}{32}) \times \frac{1}{2-1} =$$

$$1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}.$$

Exempel paa en uendelig Række med afvejlende Tegn: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots$ uendel.

er er (Till. 1) $s = \frac{ac}{c+b} = \frac{1 \times 2}{2+1} = \frac{2}{3}.$

Efter Formen $s = \frac{1}{x-1}$ er Summen af uendelige Række $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ ic. i det uendelige; saaledes $= s = \frac{1}{2-1} = 1$. For

Ræk.

Rækken $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \dots$ uendelig er $s = \frac{1}{3-1}$
 $= \frac{1}{2}.$

(Sammenlign Arithm. §. 46 om de ved Division frembragte Tal-Rækker.)

§. 72.

4de Opgave. At finde Summen af en uendelig aftagende Række, hvis Forholdsnavn

$m = \frac{1}{x+1}$ og hvis første Led $a = \frac{x}{x+1}$

og som vilde udtrykkes saaledes: $\frac{x}{x+1} +$

$\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{x}{(x+1)^3} + \frac{x}{(x+1)^4} + \dots$

$\dots \frac{x}{(x+1)^{\infty}}$

Oplosn For at finde denne Summa, inver-

teres eller omsattes Rækken saaledes: $\frac{x}{(x+1)^{\infty}} \dots$

$+ \frac{x}{(x+1)^4} + \frac{x}{(x+1)^3} + \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{x}{(x+1)}$

Vi faae da en tiltagende geometrisk Række, hvis Forholdsnavn $m = (x+1)$ det første Led $a =$

$\frac{x}{(x+1)^{\infty}} = 0$, det sidste Led $u = \frac{x}{x+1}$;

alts.

altsaa efter Formen $s = \frac{ms - a}{m - 1}$ er her $s =$

$$\left(\frac{x}{x+1} \times (x+1) - \frac{x}{(x+1)^\infty} \right) : (x+1)$$

$$- 1 = \frac{x - 0}{x} = \frac{x}{x} = 1. \quad \text{Sætte vi til}$$

Exempel $x = 1$, saa er Rækken $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \dots$ uendel. $= 1$.

Lill. Ved at forvandle en simpel Brøk til en Decimal-Brøk (Arithm. §. 48) har man erholdt følgende Udtryk: $0,575757 \dots$ i det Uendelige. Hvad har vel den forvandlede Brøk været?

$$\text{Da } 0,575757 \dots \text{ er } = \frac{57}{100} + \frac{57}{10000} +$$

$$\frac{57}{1000000} + \dots \frac{57}{\infty}, \text{ saa er den (§. 72) } =$$

$$\frac{57}{100^\infty} \dots + \frac{57}{100^3} + \frac{57}{100^2} + \frac{57}{100}, \text{ og følgende}$$

$$\text{Brøken } s = \left(\frac{57}{100} \times 100 - \frac{57}{100^\infty} \right) : 99 = \frac{57}{99} = \frac{19}{33}.$$

VIII. Om Logarithmer og Logarithme- Tabler, samt deres Brug.

§. 73.

Forkl. Naar een og samme Rodstørrelse a , der maae være positiv og større end 1, ophøiet efterhaanden til forskellige Potenser, hvis Exponenter ere m, n, o, p, q ic., frembringer Størrelserne b, c, d, e, f ic., saa kaldes Exponenterne m, n, o, p, q, r , Logarithmer til Størrelserne b, c, d, e, f . Saaledes at naar $a^m = b, a^n = c, a^o = d$ v. s. fr., saa kaldes m Logarithmen til b , n Logarithmen til c , o Logarithmen til d , hvilket skriftlig udtrykkes saaledes: $m = \text{Log. } b, n = \text{Log. } c$ v. s. f. **F. Ex.** $2^1 = 2, 2^{2+6} = 4, 2^3 = 8$; altsaa $1 = \text{Log. } 2, 2 = \text{Log. } 4, 3 = \text{Log. } 8$ v. s. fr.

Anm. Man finder forskellige Forklaringer paa Logarithmer efter det forskellige Sted i Systemet, hvor Logarithmernes Theorie afhandles. Saaledes findes i Hr. Justitsraad Bugges mathematiske Forelæsninger Logarithmerne afhandlet i Arithmetiken, uden foregaaende Kundskab om Bogstav-Regning; saaledes, at en arithmetisk og geometrisk sammenhængende Proportion eller Tal-Række, Leed for Leed skrevne under eller ved Siden af hinanden, udgiøre et Logarithme-System, da Tallene i den
arith-

arithmetiske Række blive Logarithmer for de dertil svarende i den geometriske Række. Uagtet Logarithmerne efter denne Theorie let og fatteligt lade sig forklare, har jeg dog hellere vildet holde mig til den her anførte mere almindelige Forklaring, som jeg paa dette Sted ikke troer at kunne være utydelig.

Till. 1. Opsatte vi en saadan Række, hvor samme Rod-udtrykt i Tal er ophøiet til forskellige Potenser, saa sees, at Exponenterne blive Tallene i deres naturlige Orden, der altid udgiøre en arithmetisk Tal-Række (§. 58 Arithm.), da de frembragte Tal derimod udgiøre en geometrisk Tals Række (§. 11 Till. 2); f. Ex. $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ er

Potenserne 1, 2, 4, 8, 16

Exponenterne ere 0 1 2 3 4

Og saaledes ere ogsaa efter den anførte Forklaring Logarithmerne Leed i en arithmetisk Progression, naar Tallene, hvis Logarithmer de ere, ere Leed i en geometrisk Progression.

Till. 2. Betragte vi de i forrige Tillæg anførte Rækker, saa da $1 : 2 = 2 : 4$ og $2 : 4 = 4 : 8$, saa er $1 : 4 = 2 : (1 : 2)$ og $1 : 8 = 4 : (1 : 2)$ o. s. v. (§. 58). Logarithmerne (her Tallene 2, 3) kan saaledes ogsaa siges at tilkiendegive hoormange Gange ethvert Forhold i Rækken er høiere end Grundforholdet, som her er $1 : 2$ (hvor til ellers kan vælges ethvert vilkaarligt Forhold)

Navnet Logarithme ($\lambda\omicron\gamma\alpha\rho\ \alpha\rho\iota\theta\mu\omicron\varsigma$ 3: Forholdenes Antal) viser ogsaa denne Logarithmernes første oprindelige Bemærkelse.

Till. 3. Den Størrelse, der, ophøiet til forskellige Potenser efter den anførte Forklaring, giver Tallene, hvortil Potens-Exponenterne ere Logarithmer; kaldes Grundtallet for Logarithme-Systemet; dets Logarithme er alletider $\equiv 1$ og Logarithmen for 1 $\equiv 0$, da ethvert Tal i 0 Potens er $\equiv 1$. I det anførte Exempel er 2 Grundtallet, dets Logarithme $\equiv 1$.

§. 74.

Hvad enten vi nu vil ansee Logarithmerne som Exponenter efter den givne Forklaring (§. 72) eller som Forholds-Tal (§. 73. Till. 2), saa sees let, at ethvert Grundtal eller Grundforhold lader sig i det Uendelige saavel formere som formindske; saaledes i det anførte Exempel, hvor 2 er Grundtallet, formeeres det saaledes: $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4$ ic.

$$\equiv 1, 2, 4, 8, 16 \text{ ic.}$$

formindskes: $2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}$ ic.
(§. 10. Till. 3) $\equiv 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ ic.

Her er Log. 1 $\equiv 0$, Log. $\frac{1}{2} \equiv -1$, Log. $\frac{1}{4} \equiv -2$ ic.

Opsættes nu disse fundne Logarithmer og de dertil svarende Tal saaledes: $\frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32$

Logarith. $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$

da

da sees, at den øverste Række er en geometrisk Række, hvis Forholds-Exponent er 2, og den underste eller Logarithmerne en arithmetisk, hvis Forholdstælling er 1. (§. 73. Till. 1).

Till. 1. Ved at søge Mellemproportional-Tal mellem ethvert Par af disse Tal saavel i den geometriske som arithmetiske Række (Arithm. §. 73) og igjen mellem de fundne i det Uendelige, maae der findes uendelig mange Mellemproportional-Tal imellem 1 og 2, 2 og 4, 4 og 8 &c., og iblandt disse maae og findes alle de hele Tal, der falde imellem ethvert Par af disse Tal, eller i det mindste Tal der nærmer sig saa meget til dem, at Feilen er umærkelig; hvorved altsaa Logarithmerne til alle disse Mellem-Tal lade sig finde.

Till. 2. Har man for et antaget Grundforhold fundet Logarithmerne for Tallene i deres naturlige Orden, saa kaldes det Hele et Logarithmesystem, hvoraf der folgelig gives utallige, da man kan antage utallige Grundtal eller Grundforhold.

§. 75.

Læresæt. Logarithmen til ethvert Produkt er Summen af Faktorernes Logarithmer, og Logarithmen til enhver Quotient er Forskiellen imellem Dividendens og Divisors Logarithmer.

Beviis.

Beviis 1) Lad i et Logarithme-System, hvis Grundtal er a , p være $\equiv a^m$ og $q \equiv a^n$, saelig (§. 73) $m \equiv \text{Log. } p$ og $n \equiv \text{Log. } q$, saa er $pq \equiv a^m \times a^n \equiv a^{m+n}$ (§. 10), altsaa $m + n \equiv \text{Log. } pq$; men nu var $m \equiv \text{Log. } p$ og $n \equiv \text{Log. } q$, saelig $\text{Log. } p + \text{Log. } q \equiv \text{Log. } pq$. For Ex. da $2 \times 8 \equiv 16$, saa er og $\text{Log. } 2 + \text{Log. } 8 \equiv \text{Log. } (2 \times 8)$, nemlig $1 + 3 \equiv \text{Log. } 16 \equiv 4$. (§. 74)

2) Sæt ligeledes $\frac{p}{q} \equiv a^m : a^n \equiv a^{m-n}$

(§. 11) og $\text{Log. } \frac{p}{q} \equiv \text{Log. } a^{m-n} \equiv m - n \equiv \text{Log. } p - \text{Log. } q$. For Ex. $\text{Log. } \frac{8}{2} \equiv \text{Log. } 8 - \text{Log. } 2 \equiv 3 - 1 \equiv 2 \equiv \text{Log. } 4$.

Ex. 1. Denne Sætning er ogsaa rigtig, naar et Produkt bestaar af flere end to Factorer; saaledes er $\text{Log. } pqr \equiv \text{Log. } p + \text{Log. } q + \text{Log. } r$; thi sæt $qr \equiv x$ $\text{Log. } pqr \equiv \text{Log. } px \equiv \text{Log. } p + \text{Log. } x$; nu er $\text{Log. } x \equiv \text{Log. } qr \equiv \text{Log. } q + \text{Log. } r$, altsaa $\text{Log. } pqr \equiv \text{Log. } p + \text{Log. } q + \text{Log. } r$.

Ex. 2. Ere ved Divisionen m og n positive Tal og $m > n$ (Dividendens Logarithme større end Divisor's), saa er og $(m - n)$ et positiv Tal og

$\frac{p}{q} > 1$. Logarithmer for alle Tal, der ere større

større end Eenheden, ere derfor positive. (§. 73).

Lill. 3. Er $m = n$, saa er $(m - n) = 0$ og $\frac{p}{q} = 1$, da $a^{m-n} = \frac{p}{q} = a^0 = 1$ (§. 11

Lill. 2). Logarithmen for Eenheden er derfor allestider $= 0$.

Lill. 4. Er $m > n$; saa er $(m - n)$ en nægtende Størrelse, og $\frac{p}{q}$ en egentlig Brøk. Logarithmerne til egentlige Brøke ere derfor altid nægtende Størrelser (§. 74).

§. 76.

Læresæt. Logarithmen til enhver Potens findes, naar Rodens Logarithme multipliceres med Potensens Exponent; og Logarithmen til enhver Rod, naar Potensens Logarithme divideres med Rod-Exponenten.

Beviis 1. Er $a^m = p$, saa er ogsaa $(a^m)^x = p^x$, altsaa (§. 12) $= a^{m \times x} = p^x$, følgende $x \times m = \text{Log. } p^x$; men nu er $m = \text{Log. } p$ (§. 73), og saaledes $x \times \text{Log. } p = \text{Log. } p^x$.
 Ex. $\text{Log. } 2^3 = 3 \times \text{Log. } 2 = 3 \times 1 = 3$.

2. Da vi antog $a^m = p$, saa er ogsaa $\sqrt[x]{a^m} = \sqrt[x]{p}$

og (§. 14) $a^{\frac{m}{x}} = \sqrt[x]{a^m}$; følgelig $\frac{m}{x} = \text{Log. } \sqrt[x]{a}$

(§. 73), men $m = \text{Log. } a$, altsaa $\frac{\text{Log. } a}{x} =$

$\text{Log. } \sqrt[x]{a}$. 8. Ex. efter det anførte System er Lo-

garithmen til Cubifroden af 8 $= \frac{\text{Log. } 8}{3} =$

$\frac{2}{3} = 1$, som er Logarithmen til 2, der er Cu-
bifroden af 8.

Till. 1. Lad et givet Tal $N = n^y$, saa er
 $\text{Log. } N = yx \text{ Log. } n$ (§. 76) og $\frac{\text{Log. } N}{\text{Log. } n} = y$ (§. 22)

d. e. man finder Exponenten y til en Potens
naar man dividerer Logarithmen til Potensen N
med Logarithmen til Roden n .

Till. 2. Ved Hielp af Logarithmerne skeer, i
Følge de nu forklarede Gærninger, al Multiplica-
tion og Division med Tal, ved at addere og sub-
trahere, og man undgaar saaledes den ved Tal,
som bestaae af mange Cifre, vidtløftige og feed-
somme Multiplication og Division; som og den
endnu besværligere Rod Extraction. Logarithmer ere
saaledes for store Regninger overmaade beqvemme,
men aldeles uundværlige, naar, som i 1ste Tillæg,
et Tal N gives ligestort med et andet Tal n , ophøiet
til en ubekendt Værdighed, hvis Exponent er y ,
og Exponenten y søges.

§. 77.

For at beregne Logarithmer til alle naturlige Tal, behøver man allene at sætte: $a^m = 2$, $a^n = 3$, $a^o = 5$, $a^p = 7$, $a^q = 11$, og $a^r = 199991$, og derefter beregne Værdien for Størrelserne m , n , o , p ic., saa faaer man Logarithmerne for alle Primtal fra 1 til 100000; og af disse Logarithmer kan Logarithmerne for alle de øvrige mellemliggende Tal findes ved blot Addition, da alle sammensatte Tal ere ved Multiplication frembragte af de enkelte (Prim) Tal. Indfører man disse Logarithmer i en ordentlig Table eller Tabelle og sætter dem ligeover for de dertil hørende Tal, saa faaer man en meget beqvem Table, ved hvis Hielp man kan erholde den (§. 76 Till. 2) omtalte Fordeel. Disse Værdier for m , n , o ic. kunde ved uendelige Tal-Rækker lettest beregnes; men denne Maades Forklaring ligger udenfor denne Bogs bestemte Grændse, og nævnes derfor kun.

Anm. De paa denne Maade søgte Logarithmer (naar Modellen, det er, det almindelige Tal, hvormed de fundne Logarithmer multipliceres, antages $= 1$) kaldes naturlige eller hyperboliske (Anledningen til det sidste Navn kan her endnu ikke forklares) Logarithmer, og som ikke maa confunderes med de saa kaldte gemene eller Briggiske Logarithmer, hvis Model er $= 0,4342945$, og hvorum nu skal handles.

§. 78.

F o r k l. Af alle mulige Logarithme-Systemer kaldes det, hvis Grundtal er 10, eller hvis Grundforhold er $1 : 10$, det gemene eller Briggiske Logarithme System.

Dette System blev strax efter at Logarithmerne af Johan Naiper vare opfundne, beregnet af Heinrich Brigg og fuldført af Adrian Blacq. For dette System, som bestaaer af disse to Rækker

1, 10, 100, 1000, 10000

eller $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4$

Logarithm. 0 1 2 3 4

har Brigg beregnet Logarithmer til alle Primtal paa den (§. 74) forklarede Maade, nemlig ved at søge utallige Mellemproportional-Tal saavel i den geometriske som arithmetiske Tal-Række; paa den i §. 77 nævnte Methode funde de derimod lettere findes; ligesom og de naturlige Logarithmer nu meget let kan forandres til Briggiske, og omvendt, efter det (§. 77) anførte.

Till. 1. Det Briggiske System har, foruden de forhen anførte Fordele, denne særdeles Fordeel, at man af Cifrenes Antal i det Tal, hvis Logarithme man søger, strax kan vide Logarithmens hele Tal (eller det første Tal i Logarithmen), som derfor og kaldes Logarithmens Kiendetal eller Characteristik. (de
sørgte

øvrige eller Brøkerne kaldes *Mantissen*), der altid indeholder saa mange Enheder som Tallet, hvortil Logarithmen svarer, har Cifre mindre end een. Saaledes er Logarithmen for alle Tal fra 1 til 10 0 og en Brøk, for Tallene fra 1 til 100 (der bestaae af to Cifre) 1 og en Brøk 0. s. fr. Omvendt kan man af Logarithmens Kiendetal vide hvor mange Cifre det til Logarithmen svarende Tal har.

Till. 2. At beregne et fuldstændigt Logarithme-System vilde, efter det Forklarede, vel ikke være noget vanskeligt, men dog et overmaade vidtløftigt Arbejde; men vi kunde nu spare os denne Umage. Vore Forgængere have heri sørget for os, og paa den ovennævnte besværlige Maade længst fuldført dette Arbejde. Vi behøve kun at gjøre os Brugen ret bekiendt af de allerede tilværende logarithmiske Tabler.

Till. 3. Disse Tabler indeholde dog allene kun Logarithmer for hele bekræftende Tal; thi Logarithmer for Brøk (som ere nægtende) kan vides af Logarithmerne for hele Tal (som siden skal vises); og for nægtende Tal gives aldeles ingen Logarithmer, da ingen Potens af det antagne bekræftende Grundtal (§. 12) kan blive nægtende, men bliver stedse bekræftende (§. 19).

Till. 4. Ved mindre Tabler forstaaes almindelig saadanne, som kun indeholde Logarithmer for
de

de naturlige Tal fra 1 til 10000 eller mindre, og hvor Logarithmerne kun have syv eller endog færre Decimalbrøst; ved større Tavler derimod deels saadanne, som gaae i det ringeste til 100000, og deels saadanne, hvor Logarithmerne have flere end syv Decimalsteder.

Anm. 1. Af de mindre gives der en stor Mængde, som, uagtet de mange Gange ere oplagte, dog ere fulde af Trykfeil og slet ikke beqvemt indrettede, med hvilke man dog mæisommelig have hlulpet sig, da de store af Sherwin og Gardener ere for dyre til at enhver Mathematiker kan anskaffe sig dem; først for tyve Aar omtrent have større og beqvemt indrettede i Tydskland udgivne Tavler været at erholde for en taalelig Priis. Det er meger at tilraade enhver Begynder, strax at betiene sig af en af disse velindrettede Tavler, hvorved de logarithmiske Regninger kan føres med Nøiagtighed.

Anm. 2. De vigtigste af disse ere følgende:

- I) Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer, und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln von Johan Carl Schulze. Berlin 1778. 8vo. (Koster i Tydskland 4 Rdlr.)
- II) Logarithmische, trigonometrische, und andere zum Gebrauch der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln, von Georg Vega. 2te Aufl. Leipzig 1794. 4to. (Priis 5 Rdlr.)
- III) Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, von Georg Vega. Leipzig 1793. (Koster i Tydskland 1 Rdlr. 4 Gr.)

Af disse fortæner No. II at anbefales til alle som agte at gøre Fremgang i Mathematik, naar de ikke allerede eie No. I; hvem denne er for kostbar, kaffe sig i det mindste No. III.

IV) Ved afdøde Prof. Gauss's Omsorg have vi ogsaa en Samling af Logarithme-Tabeller her udsigvne, som kan faaes i den Gyldenbalske Boghandel for 3 Rtl.

At besørge en dansk Udgave af Logarithmer efter de Vega'ske Tavler med de mulige Forbedringer, er et Ønske, jeg længe har næret, naar Tid forundtes mig og en Forlægger dertil kunde findes.

Anm. 3. Indretningen i alle disse Tavler, som og i de i Engelland og Frankrig hidtil udkomne, er i Hovedsagen den samme; saa at den her følgende Underretning om Brugen af trigonometiske Tavler og deres Indretning, hvorved jeg især har Hensyn til og citerer Vega's logarithmiske Haandbog, kan let anvendes paa alle de andre.

§. 79.

Efter det forklarede (§. 73) er Logarithmen for ethvert givet Tal N , multipliceret med 10 i en vis Potens, $\text{Log. } (N \times 10^n) = \text{Log. } N + n \times \text{Log. } 10$; men da i det Briggiske System $\text{Log. } 10 = 1$ (§. 78), saa er efter samme $\text{Log. } (N \times 10^n) = \text{Log. } N + n$, og findes altsaa, naar man til Riendetallet i Logarithmen for N adderer Exponenten n uden at forandre Mantissen.

N være

N være for Ex. 3 og $n = 2$, saa er Log. $(3 \times 10^2) = \text{Log. } 3 + 2 \text{ Log. } 10 = \text{Log. } 3 + 2$, men Log. 3 $= 0,47712,12$ og Log. 300 $= 2,4771212$. Ligeledes er Log. $(N : 10^n) = \text{Log. } N - n \text{ Log. } 10$; og da Log. 10 $= 1$, saa er Log. $(N : 10^n) = \text{Log. } N - n$, og findes naar man fra Riendetallet i Logarithmen for N subtraherer Exponenten n uden at forandre Mantissen. N være f. Ex. $= 874$ og $n = 2$, saa er Log. $(874 : 10^2) = \text{Log. } 874 - 2 \times \text{Log. } 10 = \text{Log. } 874 - 2$; nu er Log. 874 $= 2,9415114$, altsaa Log. $\frac{874}{100} = 0,9415114$.

Anm. I det sidst anførte Tilfælde er det i Regninger særdeles beqvemt, blot at tilkiendegive Subtractionen ved Tegn uden virkelig at foretage den, saaledes at man paa høire Side af Log. N sætter Exponenten n med Tegnet $(-)$ foran; som Log. $\frac{874}{100} = 2,9415114 - 2$. En saadan Logarithme bestaaer altsaa af to Dele, nemlig en bekræftende (den egentlige Logarithme) og den tilføiede benægtende Deel $- n$, der skal subtraheres fra Riendetallet (i den bekræftende Deel), og viser, at det Tal, der svarer til den bekræftende Deel, skal divideres med den n te Potens af 10.

LIII. Denne anførte Egenskab gior, at det Briggiske System, med Hensyn til vores decadiske Tal-System, forskaffer i Regningen en overmaade stor Lettelse, da man af Logarithmen for ethvert
givet

givet Tal kan, blot ved at forøgere eller formindſke Rindetaallet, finde Logarithmer til alle Producter eller Quotienter, der kan frembringes ved at multiplicere eller dividere dette Tal med Potenser af 10.

For Ex. er Log. 874 \equiv 2,9415114

ſaa er Log. 8740 \equiv 3,9415114

Log. 87400 \equiv 4,9415114

og Log. $\frac{874}{16}$ \equiv Log. 87,4 \equiv 2,9515114 — 1
 \equiv 1,9415114

Log. $\frac{874}{100}$ \equiv Log. 8,74 \equiv 0,9415114

Log. 0,874 \equiv 0,0419114 — 1.

§. 80.

1 ſte Opgave. At finde i Tavlerne Logarithmer til ethvert givet Tal, der ikke beſtaaer af mere end fem Cifre.

Opløſn. 1. Beſtaaer det givne Tal af eet, to eller 3 Cifre, ſaa finder man det i den §. 78. under No. III. nævnte Vegas Haandbog fra Side 2 til 5 i den 1^{te} Spalte, ſom for oven er betegnet med N (numerus) og dets Logarithme lige for i den næſte Spalte, ſom er betegnet for oven med Ordet Log. Saaledes findes Side 5 Log. 874 \equiv 2,9415114.

2. Beſtaaer det givne Tal af fire Cifre, ſaa finder man det paa en af de følgende Sider i den
 forſte

første for oven med N betegnede Spalte, og det Logarithme, men uden Riendetal, lige for i den næste Spalte, som for oven er betegnet med O, saaledes at de tre første Chifre af Mantissen, saa længe de blive uforandrede, ikke igientages, men maa tilføies.

Saaledes findes f. Ex. S. 12 Uallet 1345 lige for Mantissen 1287223 uden Riendetal; men efter det (§. 79) anførte veed man, at Riendetallet er 3, og altsaa Log. 1345 = 3,1287223

$$\text{og (§. 79) Log. 134500} = 5,1287223$$

$$\text{Log. 13,45} = 3,1287223 - 2$$

$$= 1,1287223$$

3. Har det givne Tal fem Cifre, saa søger man paa samme Maade de fire første i Spalten betegnet med N, og lige for i Spalten O de tre første Chifre af Mantissen, og i en af de andre Spalter, som for oven er betegnet med det Ciffer, der er det femte i det givne Tal, de fire øvrige Cifre af Mantissen.

Lad f. Ex. det givne Tal være 13457; man finder Side 12 i første Spalte de fire første Cifre 1345, lige for i den med o betegnede Spalte de tre første Cifre af Mantissen 128; og da det femte Ciffer i det givne Tal er 7, saa findes de fire øvrige Cifre af Mantissen lige for i den for oven med 7 betegnede Spalte at være 8483. Altsaa er

Log.

Log. 13457 = 4,1289483; thi at Kiendetallet skal være 4, sees af Cifrenes Antal i det givne Tal (§. 78 Till. 1).

Uf denne fundne Logarithme kan uden videre Opsøgning findes

$$\text{Log. } 1345700 = 6,1289473 \quad (§. 75)$$

$$\text{Log. } 13,457 = 1,1289483$$

Anm. Ere de paa den nu forklarede Maade fundne sidste fire Cifre af Mantissen foran betegnede med (*), saa skal til de tre første Cifre i Mantissen af den med 0 betegnede Spalte ikke tages de foregaaende, men de efterfølgende; hvilket endog uden dette Tegn kunde kiendes derpaa, at disse fire sidste Cifre ere mindre end de næst foregaaende. Saaledes er for Tallet 13336, som findes Side 12, Mantissen ikke 1240256, men 1250256.

§. 81.

Fra 1000 til 10000

Læresætning. Uden mærkelig Feil kan man antage, at Differencen af Logarithmer vore ligesom Differencen af de dertil svarende Tal, og altsaa at Delene af Logarithme-Differencen for to Tal, hvoraf det ene er een Eenhed høiere end det andet, forholde sig til hinanden ligesom Delene af denne Eenhed.

Beviis. Da Logarithme-Differencerne for de nær efter hinanden følgende Tal (hvilke Differencer

fra Side 6 findes angivne i den fjerde Spalte, (der for oven er betegnet $P P$ og for neden diff.) hele Sider igiennem, især ved høie Tal, blive uforandrede de samme, saa kan man uden nogen mærkelig Feil antage, at disse Logarithme-Differencer ere proportionerede med Tallenes Difference; det er, at Logarithmen for et Tal, for enhver Eenhed, hvor, med Tallet forøges, vokser saa meget som den enkelte Difference er imellem to paa hinanden følgende Logarithmer; og at folgelig ogsaa (ja end mere vist) et Tals Logarithme for hver Tiendedeel eller Hundrededeel, hvormed Tallet forøges, steds her forøges med en Tiende, eller Hundrededeel af Logarithme-Differencen.

For Ex. Side 61. For Tallet 37785 og det næstfølgende er Logarithme-Differencen 115 (hvilk man finder naar man subtraherer allene de sidste Cifre af Logarithmen for 37785 fra de sidste Cifre af den næstfølgende Logarithme). Forøges nu Tallet 37785 med Decimalbrøken 0,47, da maae Logarithmen forøges med ligesaa mange Dele af Differencen der findes ved denne Regning:

$1 : 0,47 :: 115 : x$, og bliver $x = 54$, som er det der skal lægges til Log. 37785 for at finde Log. 37785,47.

For at spare denne Regning findes i den fjerde Spalte

Spalte under enhver Logarithme. Differenti de logarithmiske Proportional-Dele, der svare til alle Tiendedele, og folgelig divideret med 10 ogsaa til alle Hundrebedele. Saaledes i det anførte Exempel:

$$\text{(for } 0,4) \quad P P = 46$$

$$\text{og (for } 0,07) \quad P P = 8,2$$

$$\text{folgelig (for } 0,47) \text{ somtilforn} = 54$$

$$\text{Nu er Log } 37785 = 4,5773149,$$

$$\text{altsaa Log. } 37775,47 = 4,5773203.$$

Alm. Var den tilkommende Brøf 0,07, faa tage man (for 0,0) $PP = 00$

$$\text{(for } 0,07) \quad P P = 8,1$$

VIII. Lad n være et af fem Cifre bestaaende heelt Tal, og a en Decimalbrøf, der skal adderes dertil, saa at $n + a$ falder imellem n og $n + 1$. Antages nu $\text{Log. } (n + 1) - \text{Log. } n = D$ og $\text{Log. } (n + a) - \text{Log. } n = d$, saa er den nylig forklarede Proportion $1 : a = D : d$, hvorved den logarithmiske Proportionaldeel d findes, der maae adderes til $\text{Log. } n$ for at finde $\text{Log. } (n + a)$.

Alf samme Proportion $D : d = 1 : a$ findes

ogsaa $\frac{d}{D} = a$: den Decimalbrøf som maae

adderes til n for at finde Tallet der svarer til $\text{Log. } (n + a)$.

Saaledes i det nylig anførte Exempel var

Differencen imellem Log. 37285 og den næstfølgende $\equiv 115$ og dens Difference fra en given Logarithme, der var større end den, men mindre end den følgende, $\equiv 54$. Quotienten $\frac{54}{115} \equiv 8,47$ er derfor den Decimalbrøk, der skal adderes til 37285.

Denne Regning spares, naar man Side 61 i den sidste Spalte ved Differencen 115 op søger Proportionaldelen 46, som nærmer sig meest til 54. Det derved staaende Tal 4 giver Tiendedelene, og det ved det tidobbelte af Resten (80) staaende Tal 7 Hundrededelene; og følgellig udgiøre begge Decimalbrøken, 0,47 som tilforn.

§. 82.

2'den Opgave. Ved Hielp af Tavlerne at finde Logarithmen til et givet Tal, der bestaaer af mere end fem Cifre.

Oploesn. 1. Bestaaer det givne Tal af sex eller syv Cifre, saa søger man (§. 80) Logarithmen for de fem første Cifre, og adderer dertil Proportionaldelene af Logarithme-Differencerne for det fette og syvende Ciffer, som findes i den sidste med *PP* betegnede Spalte (§. 81 Till.) og bestemmer Riendetaillet efter §. 78. Saaledes findes f. Ex.
(§. 81)

$$(\S. 80) \text{ Logar. } 3778547 = 7,5773248$$

$$\text{Log. } 37785470 = 8,5773248$$

$$\text{Log. } 37,785470 = 1,5773248.$$

Anm. Hvis i den sidste med *PP* betegnede Spalte den tilhørende Logarithme-Differents ikke findes, maa man tage den næstforegaaende større.

2. Bestaaer det givne Tal af mere end syv Cifre, saa kan til at finde Logarithmen bruges de i Tablerne S. 186 og 187 anførte Logarithmer for Tallene til 101000 paa følgende Maader:

1) Bestaaer Tallet kun af otte Cifre og er saaledes, at de sex første Cifre udgiøre et Tal der er mindre end 101000, saa finder man dets Logarithme efter første Oplosning. S. Ex.:

$$\text{Log. } 10030627 = 7,0013281.$$

2) Bestaaer Tallet af otte eller flere Cifre, der ere af vilkaarlig Størrelse, saa bringer man det til første Tilfælde ved at dividere det med to eller flere af dets høieste Cifre, søger derpaa Logarithmen til Divisor og til Quotienten og adderer dem sammen.

S. Ex. Der søges Logarithm. 290888209; dette Tal divideret med 29 giver Quotienten 10030627, saa er Log. 10030627 = 7,0013281

$$\text{Log. } 29 = 1,4723980$$

$$\text{Log. } 290888209 = 8,4637261.$$

Anm.

Anm. Kan et givet, af mange Cifre bestaaende Tal opløses i Faktorer, da findes dets Logarithme ved at søge Faktorernes Logarithmer og addere dem; hvilket ogsaa kan tiene til Prøve paa den forrige Methode.

§. 83.

3die Opgave. At finde Logarithmen til enhver Brøk eller Quotient.

Opløs. Man op søger Logarithmen for Brøks Tæller og Nævner (Dividend og Divisor), og (§. 75) subtraherer Nævnerens Logarithme fra Tællerens. Er Brøken uegentlig (Arithm. §. 74), har dette ingen Vanskelighed: men er den egentlig, og folgelig Nævneren større end Tælleren, kan man gaae frem paa to Maader:

1) Man subtraherer Tællerens Logarithme fra Nævnerens, og man faaer en nægtende Logarithme (§. 74. Till. 4).

Til Ex. søges Log. $\frac{3}{4}$ og Log. 0,09436

$$\text{Log. } 3 = 0,4771213$$

$$\text{Log. } 4 = 0,6020600$$

$$\text{Log. } \frac{3}{4} = -0,1249387$$

$$\text{Log. } 9436 = 3,9747879$$

$$\text{Log. } 100000 = 5,0000000$$

$$\text{Log. } 0,09436 = -1,0252121$$

eller

eller 2) Man forbyr Kiendetaillet i Tællerens Logarithme (§. 75), saa at Nævnerens Logarithme kan subtraheres derfra. Saaledes er ved de anførte Brøf:

$$\text{Log. } 3 = 1,4771213 - 1$$

$$\text{Log. } 4 = 0,6020608$$

$$\text{Log. } \frac{3}{4} = 0,8750613 - 1$$

Den fundne Logarithme viser, at fra 0,8750613 skal subtraheres 1,0000000; gøres dette, faaes samme Logarithme som før, nemlig $-0,1249387$.

$$\text{Ligeledes: Log. } 9436 = 5,9747879 - 2$$

$$\text{Log. } 100000 = 5,0000000$$

$$\text{Log. } 0,9436 = 0,9747879 - 2$$

Forrettes her den tilkiendegivne Subtraction, faaes som før $\text{Log. } 0,9436 = 1,0252121$.

Anm. Logarithmen for enhver gemeen Brøf kan findes ved at forvandle den til en Decimalbrøf og søge dens Logarithme, da man blot søger Tællerens Logarithme og fører Kiendetaillet i Nævnerens Logarithme (der efter det Briggske System vides uden at søges) med Nægtelses-Tegn til ved høire Side. S. Ex. $\text{Log. } \frac{3}{4} = \text{Log. } 0,75 = 1,8750613 - 2 = 0,8750613 - 1$. Saaer man, ved at forvandle den simple Brøf til en Decimalbrøf, alt for mange Decimalstæder, eller og Brøken ikke fuldkommen nøiagtig kan udtrykkes, saa er det bedre at beholde den simple Brøf. S. Ex. $\text{Log. } \frac{1}{2}$ kan findes nøiagtig; men forvandles den til Decimalbrøf, saaer man 0,5416... i her uendelige, hvis Logarithme ikke kan findes.

Zill. 1. Har en Decimalbrøk sit første betydende Ciffer i den første, anden, tredje eller nte Plads efter Commaet (Nullerne ansees som ikke betydende og tiene blot til at fylde Pladsen), saa har dens Logarithme til positiv Riendetal 0, og til nægtende 1, 2, 3 eller n, som angiver, at det Tal, hvortil den bekræftende Logarithme hører, skal dividere med 10^1 , 10^2 eller almindelig med 10^n . Saaledes findes (§. 81)

$$\text{Log. } 0,13457 = 0,1289483 - 1$$

$$\text{Log. } 0,01345 = 0,1287223 - 2$$

$$\text{Log. } 0,00874 = 0,9515114 - 3$$

Zill. 2. Forlanges Logarithmen til et saakaldet blandet Tal (et heelt Tal med en tilføjet Brøk), da forvandles det Hele til en uegentlig Brøk, og Logarithmen søges til Tæller og Nævner paa den nu forklarede Maade, og den sidste subtraheres fra den første, saa vil Differencen være Logarithmen til det givne Tal (§. 75).

$$\begin{aligned} \text{B. Ex. } \text{Log. } 47\frac{1}{7} &= \text{Log. } \frac{3302}{7} = \text{Log. } 3302 \\ &- \text{Log. } 7 = 3,5187771 - 0,8450980 = \\ &2,6736781. \end{aligned}$$

Anm. Findes der ved Tallet en Decimalbrøk, saa søger man Logarithmen til det givne Tal, som om det bestod af lutter hele Tal (uden at lægge Mærke til

til Kommaet, der skiller Brøkszifrene fra de hele Tal), og giver den fundne Logarithme det Riendetal som de for Stregen værende hele Tal fordrer (77).

§. Ex. Naar der søges Logarithmen til 785,43, saa søger man i Tavlerne Log. 78543 som findes uden Riendetal = 8951075, de for Stregen værende hele Tal 785 fordrer Riendetallet 2; altsaa er $\text{Log. } 785,43 = 2,8951075$. Aarsagen til denne Fremgangsmaade indsees let, thi $\text{Log. } 785,43 = \text{Log. } 7\frac{854}{100} = \text{Log. } 78543 - \text{Log. } 100$; men Riendetallet for den første Logarithme er 4, og for den anden Logarithme er Riendetallet 2 uden Mantisse; følgelig skal Differencen have Riendetallet 2 med den første Logarithmes Mantisse.

§. 84.

4de Opgave. At finde Logarithmen til en vis Potens eller Rod af en Brøk.

Oplosn. Man søger Logarithmen til den givne Brøk (§. 83) og multiplicerer den med Exponenten til den forlangte Potens, eller dividerer den med Exponenten til den forlangte Rod (§. 76). Dette har i Almindelighed ingen Vanskelighed; kun naar der forlanges Logarithmer for Roden af en egentlig Brøk, da man, for at kunde dividere med Rod, Exponenten, maae, ved at forsøge baade Logarithmens bekræftende og næstenoe Riendetal, ind-

indrette den saaledes, at Rod-Exponenten kan gaae op i det negative Riendetal.

§. Ex. Om der forlanges ved Logarithmer at finde den femte Rod af Brøken $\frac{3456}{5063}$, saa er

$$\text{Log. } 3456 = 4,5385737 - 1$$

$$\text{Log. } 5063 = 3,7754648$$

$$\text{Log. } \frac{3456}{5063} = 0,7631089 - 1$$

Denne Logarithme bringes, ved at forøge saavel det bekræftende som nægtende Riendetal med 4, til at Rodexponenten, hvormed der skal divideres, kan gaae op i det nægtende Riendetal; den faaer nemlig denne Form: $\text{Log. } \frac{3456}{5063} = 4,7631089 - 5$

$$\text{og Log. } \sqrt[5]{\frac{3456}{5063}} = \frac{4,7631089 - 5}{5} = 0,9526218 - 1.$$

§. 85.

Det decadiske Complement (complementum arithmeticum) til en given Logarithme kaldes det, som bliver tilovers, naar man subtraherer ethvert Tal i Logarithmen fra 10.

Eller naar n betyder et vilkaarligt Tal, saa er det decadiske Complement til dets Logarithme $= \text{Log. } 10^{10} - \text{Log. } n$. For Ex. det decadiske Complement for Logarithmen til $n = 139,13$ er

$$er = \text{Log. } 10^{10} = 10,00000000$$

$$- \text{Log. } 139,13 = 2,1434208$$

$$\text{Decadist Complement} = 7,8565791$$

hvor det sidste Ciffer 8 ikke subtraheres fra 10, men i det Sted fra 9, da man formedelt Mantissens Ufuldstændighed kan antage, at det sidste Ciffer kan formodes at være 9 i Stedet for 8.

Till. Bruges ved Regning den decadiste Opfyldning, maae man altid ved høire Side tilføie — 10.

§. 86.

5te Opgave. At finde Logarithmen til en

Brøk af den Form $\frac{ac}{b}$.

Oploen. 1. Man adderer Logarithmerne for Tællereus Faktorer og subtraherer derfra Nævnerens

Logarithme. F. Ex. der forlanges Log. $\frac{144 \times 3576}{139,13}$.

$$\text{Log. } 3576 = 3,5410798$$

$$\text{Log. } 144 = 2,1593625$$

$$\text{Log. } (3576 \times 144) = 5,6994423$$

$$\text{Log. } 139,13 = 2,1434208$$

$$\text{Log. } \left(\frac{3576 \times 144}{139,13} \right) = 3,5569215$$

Dpl.

Opl. 2. Man adderer Tæller-Faktorernes Logarithmer og den decadiske Opfyldning til Rævnerens Logarithme; den afkomne Sum tilføies — 10 paa høire Side (∴ dens Kiendetal formindskes ved at tage 10 derfra). Det anførte Exempel vilde da staae saaledes:

$$\text{Log. } 3576 = 3,5410798$$

$$\text{Log. } 144 = 2,1583625$$

$$\text{decadisk Opf. til Log. } 139,13 = \underline{7,8565791} - 10$$

$$\text{Log. } \frac{3586 \times 144}{139,13} = 13,5560214 - 10$$

$$= 3,5560214 \text{ som tilforn.}$$

Bev. $\text{Log. } a + \text{Log. } c - \text{Log. } b = (\text{Log. } a + \text{Log. } c - \text{Log. } b) + 10 - 10 = \text{Log. } a + \text{Log. } c + (10 - \text{Log. } b) - 10$; men $(10 - \text{Log. } b)$ er just den decadiske Opfyldning til $\text{Log. } b$ (§. 84).

Till. Bliver a og b uforandrede, medens c tilføies mange forskjellige Værdier, da gives Brøken

denne Form $\frac{a}{b} \times c$; og naar $a > b$, søges een-

gang for alle $\text{Log. } a - \text{Log. } b$, og denne bestandige Logarithme adderes til $\text{Log. } c$ (efter den c hvergang tillagte Værdie) eller subtraheres derfra

naar Brøken Form var $\frac{b}{a} \times c$, og a dog var som før større end b .

Anm.

Anm. Det hidtil Anførte om Tablernes Brug angik den første Hoved-Opgave: at finde Logarithmen for ethvert givet Tal; vi komme nu til den anden Hoved-Opgave: at finde hvad Tal der svarer til enhver given Logarithme.

§. 87.

6te Opgave. At finde Tallet der svarer til en given Logarithme,

Oplosn. Man opsøger i Tablerne den givne Logarithmes Mantisse uden at bekymre sig om Riendetallet, mærker det derudfor staaende Tal, hvis decadiske Værdi let efter den der givne Logarithmes Riendetal bestemmes (§. 78). Den givne Logarithme være f. Ex. 4,5773194; man opsøger da fra Side 6 i Tablerne den Side, paa hvilken man efter den for oven paa Siden ved Bogstavet *L* givne Anvisning finder de tre første Cifre af Mantissen i den med 0 betegnede Spalte. Saaledes i det anførte Exempel findes S. 61, 577, men de fire sidste Cifre søges i denne eller een af de følgende Spalter; og man finder her i den med 5 betegnede Spalte de fire sidste Cifre (3194) i den anførte Mantisse; findes ikke disse fire sidste Cifre nøiagtig, da tages de der nærme sig meest dertil. Af den første med *N* betegnede og af denne (med 5 betegnede) Spalte tages

tages de til Mantiſſen ſvarende Tal, ſom her er 37785.

Till. 1. Findes den givne Mantiſſe nſiagtig i Tavlerne, da er det fundne Tal nſiagtig det ſøgte, og dets decadiſſe Værd behøves blot at beſtemmes (§. 78).

Saaledes er $4,5773194 \equiv \text{Log. } 37785.$

$7,5773194 \equiv \text{Log. } 37785009$

$2,5773194 \equiv \text{Log. } 377,85$

$0,5773194 \equiv \text{Log. } 3,7785$

$0,5773194 - 1 \equiv \text{Log. } 0,37785$

$0,5773194 - 2 \equiv \text{Log. } 0,03778.$

Till. 2. Nærmest den fundne Mantiſſe 577,3194 (ſom vi vil kalde m) ſig blot den givne 5773248 (ſom antages $\equiv M$), ſaa gielder ogſaa det fundne Tal 37785; men da den givne Mantiſſe M var ſtørre end den fundne m , ſaaer Tallet endnu to Siſre, ſom findes paa følgende Maade:

Man ſubtraherer den fundne Mantiſſe m fra den i Tabellen næſtfølgende høiere, og ligeledes fra den givne M , og lægger Mærke til den første Different D , ſom i nærværende Exempel er $\equiv 115$, og den anden d , ſom findes her $\equiv 54$. Nu findes i den med $P P$ betegnede Spalte ved Proportionaldelene 46 og 81 de to Tal 4 og 7, ſom

som endnu maae saies til det givne, da saaledes Tallet 3778547 svarer til den givne Mantisse 5773248. Den decadiske Værd af det fundne Tal bestemmes som i første Tilfælde (Till. 1).

Till. 3. Endnu maae mærkes:

1) Gændtes Logarithme, Differencen D af en Hændelse ikke i den med P P betegnede Spalte, saa tager man den næste mindre.

2) Var d mindre end den i sidste Spalte under D ved 1 staaende Proportionaldeel, saarer af de onitatte to Tal det første 0, men det andet det ved Proportionaldefen, som er $\equiv 104$ staaende Tal.

3) Var den givne Mantisse 5770090, saa indseer man let, hvorfor de fire sidste Cifre 0090 maa søges imellem de til de tre første 576 henhørende med (*) betegnede cifre.

§. 88.

7de Opgave. At finde det Tal der svarer til en given nægtende Logarithme.

Opløsn. 1. Vil man finde det tilsvarende Tal i Decimalbrøf (at det maae være en Brøf, er klart), saa adderer man til den givne Logarithme, som kunde være f. Ex. $-2,4226805$, Logarithmen til 1000, 1 Mill. eller 1000 Mill., for Ex. den

den sidste; som er 9, og man faaer 6,5773194, og søger paa den (§. 87) forklarede Maade det tilsvarende Tal 3778547. Dette divideres med 1000,000000, og man faaer 0,003778547.

Beviis. Ved at addere den nægtende Logarithme til Logarithmen for 1000 Millioner, er det fundne Tal blevet tusind Millioner Gange større end det skulde; for altsaa at give det fundne Tal sin sande Værd, maae det divideres med 1000 Mill.

2. Vil man have en simpel Brøk, saa søger man det, til den givne Logarithme, positiv tagen, svarende Tal (§. 87) 264,6352, og sætter en Brøk, hvis Nævner er dette Tal, og hvis Tæller er Enheden. Altsaa $264,6352 = \frac{10000}{2646352} = \frac{1250}{330819}$.

Beviis. Den givne negative Logarithme være $= -L$ og $L = \text{Log. } n$; saa da L er antagen $= \text{Log. } n$, saa er og $-L = \text{Log. } -n$, altsaa ogsaa $\text{Log. } 1 - L = \text{Log. } 1 - \text{Log. } n$; men nu veed vi, at $\text{Log. } 1 - \text{Log. } n$ er $\text{Log. } \frac{1}{n}$, altsaa $\text{Log. } 1 - L = \text{Log. } \frac{1}{n}$, men $\text{Log. } 1 = 0$, følger lig $-L = \text{Log. } \frac{1}{n}$; d: det til Logarithmen $-L$ svarende Tal er $= \frac{1}{n}$, naar ellers Tallet n hører til Logarithmen L .

Saaledes finder man f. Ex., at til Logarithmen $-1,3262234$ svarer Tallet 0,04718, naar man

man til — 1,3262334 adderer Logarithmen for 100000, som er 5: 3: naar man subtraherer 1,3262334 fra 5 (Kritik. 9. 33) og til den da fundne positive Logarithme 3,6737666 opføjer det nærmest svarende Tal 4718, og dividerer det med 100000.

Anm. 3 Stedet for Logarithmen til 100000 kunde man adderet enhver anden positiv Logarithme, f. Ex. Log. 144 til den givne nægtende, og derpaa divideret det til den frembragte positive Logarithmer svarende Tal med 144.

§. 89.

Uagtet der i den hele Mathematisk forekomme ideltige Fælligheder til at anvende Logarithmerne, saa har jeg dog troet det passende, her at anføre nogle særdeles Exempler paa deres Brug, for at give Begyndere Anledning til strax at udøve den her meddeelte Underretning, som og for at gøre opmærksom paa Forskiellen imellem den simple Regning og Regning med Logarithmer.

1ste Opgave. At forvandle en stæmpel (gemmen) Brod til Decimalbrod.

Oplosn. Den givne Brod være $\frac{1}{7}$. Da Log. $\frac{1}{7} = \text{Log. } 1 - \text{Log. } 7$ $\frac{1}{7} = \text{Log. } 7$, saa søger man i Tablerne Log. 7, tager dens decadiske Opfoldning 9,1549019 — 10 = 0,1549019:

denne opgave giver Tallet $0,1428571 = \frac{1}{7}$ (Arth. S. 45).

2de Opgave. Naar en dansk God i Løngemaal holder 139,13 Pariser Linier; hvor mange Pariser Rubifommer holder da en dansk Rubiffod?

Oploen. En dansk God $= \frac{139,13}{12}$ Pariser Fommer; heraf søges Rubus saaledes (S. 76):

$$\text{Dog. } 139,13 = 2,1434208$$

$$\text{Dog. } 12 = 1,0761812$$

$$\text{Dog. } \frac{139,13}{12} = 1,0642396$$

$$2. \times \text{Dog. } \frac{139,13}{12} = 3,1927188, \text{ som, op}$$

søgt efter den givne Anvisning, angiver Tallet 1558,507, som er det forlangte.

3de Opgave. Naar Forholdstallet imellem to Maal er givet, da af det ene at finde det andet.

Oploen. Sæt at det større forholder sig til det mindre som $n : m$. For Ex. Pariser og dansk Godmaal 144 : 139,13, og m Eenheder af det større er lige med n Eenheder af det mindre; man skal, naar et af disse to Tal er givet, finde det andet. B. Ex. efter la Lande er en middel Grad paa Jordkloben $= 5720$ Pariser $= 342180$ Pariser

eller God $= m$; hvor mange danske God er den da? eller hvad er m ?

Da Forholdet $a : b$ bliver uforandret, saa regner man ofte den Form $\frac{a}{b}$ (§. 86 Till.); vi finde da

$$\text{her } \log. m + \log. \frac{a}{b} = \log. m \text{ og } \log. m -$$

$$\log. \frac{a}{b} = \log. m.$$

$$\log. \frac{a}{b} = \log. \frac{144}{139,13} = 0,0149417$$

$$\log. m = \log. 34210 = 5,5342546$$

$$\log. m = 5,5391963$$

som giver Tallet $m = 354157$ danske God, $\frac{1}{17}$ deraf giver 23610 danske God eller en geographisk Mill.

Anm. En dansk Mill er 2400 God, altsaa 390 God større end en geographisk Mill.

IX. De geometriske Talrækkers og Logarithmers Anvendelse til at opløse forskellige Regnings-Opgaver.

§. 90.

1^{ste} Opgave. Hvor stor vil en vis Capital a være efter n Aar, naar Renten ved et hvert Aars Ende lægges dertil, og af denne igjen gives Rente?

Opløsn. Renten af en vis Capital a kan altid ansees som et Produkt af Capitalen og en egentlig Brøk. Er f. Ex. Rentefoden (den lovmæssige Rente), som her i Danmark er 4 Procento (4 Rdlr. af Hundrede), saa er Renten for et Aar $\frac{1}{25}a$; og antage vi i Almindeligheden, at det er Brøken $\frac{q}{r}$, hvormed Capitalen skal multipliceres for at finde Renten for eet Aar, saa er det almindelige Udtryk for Renten $\frac{q}{r}a$.

Og saa
ledes
efter
1 Aar

$$a + \frac{q}{r} a = \frac{ar + qa}{r} = \frac{r+q}{r} a$$

2det
Aar

$$\begin{aligned} \frac{r+q}{r} a + \frac{q}{r} \left(\frac{r+q}{r} \right) a &= \\ &= \frac{r^2 + 2rq + q^2}{r^2} a = \left(\frac{r+q}{r} \right)^2 a \end{aligned}$$

3die
Aar

$$\begin{aligned} \left(\frac{r+q}{r} \right)^2 a + \frac{q}{r} \left(\frac{r+q}{r} \right)^2 a &= \\ &= (r^3 + 2r^2q + r^2q + rq^2 \\ &\quad + 2rq^2 + q^3) a = (r^3 + 3r^2q \\ &\quad + 3q^2r + q^3) a : r^3 \end{aligned} \quad \left(\frac{r+q}{r} \right)^3 a$$

n Aar

$$\left(\frac{r+q}{r} \right)^{n-1} a + \frac{q}{r} \left(\frac{r+q}{r} \right)^{n-1} a = \left(\frac{r+q}{r} \right)^n a$$

Bed

Med Logarithmer findes Værdien $\left(\frac{r+q}{r}\right)^n a$

$$\text{følede: } \text{Log.} \left(\frac{r+q}{r}\right)^n a = n \text{Log.} \frac{r+q}{r} + \text{L. } a$$

$$= n (\text{Log.} (r+q) - \text{L. } r) + \text{L. } a.$$

Er m paa Spøds er Capital, Rente og Rentens Rente af 10000 Rdlr. efter 10 Aars Fortid, naar Renten er 5 Procent eller $\frac{q}{r} = \frac{1}{20}$? Ef-

ter Formen er den søgte Summa, som vi kan

$$\text{falde } x = \left(\frac{r+q}{r}\right)^{10} a; \text{ altsaa } \text{Log. } x = 10$$

$(\text{Log.} (r+q) - \text{Log. } r) + \text{Log. } a.$ Med at ind-
sætte de givne Værdier er

$$\text{Log. } x = 10 (\text{Log. } 21 - \text{Log. } 20) + \text{Log. } 10000$$

$$\text{Nu er } \text{Log. } 21 = 1,3222193$$

$$\text{Log. } 20 = 1,3010300$$

$\text{Log. } 21 - \text{Log. } 20 = 0,0211893$, som,
multipliceret med 10, giver 0,2118930

hertil adderes $\text{Log. } 10000 = 4,0000000$

og $\text{Log. } x = 4,2118930$, som,

opført i Tablerne efter de forklarede Regler, hen-
viser til Tallet 16280, som er den forlangte Capital
med Rente og Rentens Rente.

§. 91.

2den Opgave. Naar en Capital a var uds-
laant paa de Vilkaar, at den først efter et
be

bestemt Antal af Aar, som vi vil kalde n ,
fulde tilbagebetales; hvormeger skal Eieren
have, naar Laaneren-kaar betaler?

Oploesn. Det er klart, at den, der faaer en
Capital udbetalt for han kunde forbre den, naar
deres fornsiet, naar han faaer saa stor en Sum af
Capitalen, at denve. udsat til lovlige Renter og
disse Renter igjen nyttede, kunde til den bestemte
Tid udgiøre den fulde Capital som han da havde
at forbre.

Naar vi altsaa i den forrige Form $x =$
 $\left(\frac{r+q}{r}\right)^n a$ sætte a og x i hinandens Sted, saa af-
den Størrelse, der før var ubekendt og søgtes,
er nu den givne og omvendt, saa finde vi af Formlen

$$a = \left(\frac{r+q}{r}\right)^n x$$

$$x = a : \left(\frac{r+q}{r}\right)^n$$

$$x = a \times \left(\frac{r}{r+q}\right)^n = \frac{r^n}{(q+r)^n} a$$

Følgelig, dog, $x = n \text{ L. } r + \text{L. } a - n \text{ L. } (q+r).$

Exemp. En Aro af 4000 Rdlr. er bestemt
at udbetales til en Person naar han er 20 Aar
gammel; til den Tid er fri Raadighed berøber og
Brug deraf overdraget til en anden, som vi vil
antage

Antage at Finde Væde 10 Procent aarlig i Fordeel
betraf. Forudsæt kan den første uden Skatte ud-
betale til Arvingen naar han er 15 Aar, eller fem
Aar for den bestemte Tid.

$$\text{Her er } n = 5, a = 4000. \frac{q}{r} = \frac{10}{100} =$$

$\frac{1}{10}$ ($q = 1, r = 10$): vi finde da

$$888. x = 5 \text{ Lsg. } 10 = 5,0000000$$

$$+ 888. 4000 = 3,6020600$$

$$\hline 8,6020600$$

$$- 5 \text{ Lsg. } 11 = 5,2069635$$

$$\hline = 3,3950965, \text{ som}$$

giver Tallet 2484 paa det nærmeste; men end
2484 Rdlr. kan han selvsig ikke uden Skatte ac-
cordere Arvingen.

Anm. 1. I den her brugte Form betyder n hele
Aar. Er derimod den givne Tid er blanded Tid,
f. Ex. $8\frac{1}{2}$ Aar, saa sætter man $n = 8$, og for den
da fundne Capital x beregnes den simple Rente for
 $\frac{1}{2}$ Aar.

Er i et Land halvaarlige eller fjerdingaarlige Ren-

ter brugelige, saa sætter man $\frac{q}{2r}$ eller $\frac{q}{4r}$ i Stedet

for $\frac{q}{r}$ og $2n$ eller $4n$ i Stedet for n .

3. Ex. Hvad er Værdien af en Capital til 4 Pro-
cent efter n Aar, naar Renterne betales hvert halve
Aar? er det samme som: hvad er Værdien af samme
Capital til 2 Procent efter $2n$ Aar?

Anm.

Anm. 2. Man har betragtet Tavler for Størrelsen $\left(\frac{r+q}{r}\right)^n$ enten ved Logarithmer, eller noget tidligere umiddelbar ved at sætte Potenser af $\left(\frac{r+q}{r}\right)$

Saaledes Tavler finder man f. Ex. i

- 1) Florencourts Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst. Altenb. 1781. 4.
 - 2) Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften von Joh. Albst. Tetens, Leipzig 1785.
 - 3) Anfangsgründe der Staatsrechnung von Joh. Wilhelm Christiani. Helmstedt 1793.
- Disse tre i dette Sag særdeles brugbare Bøger indeholde, foruden de omtalte, endnu flere, til denne Slags Regning nødvendige Tavler.

§. 92. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.

Æresætn. Bliver en paa Rente indsat Capital a foruden den tillagte Rente og Rentens Rente desuden aarlig forøget med en bestemt Summa b , da er efter n Aar. Værdien af den hele Capital $x = \left(\frac{q+r}{r}\right)^n a +$

$$\frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - b}{\frac{q+r}{r} - 1} = \left(\frac{q+r}{r}\right)^n a + \frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - rb}{q}$$

Beviis.

Bevist. Efter dette i Forveien antagne almindelige Udtryk for Renten $\frac{q}{r} a$

er efter

Capital, Rente og Tilleg.

$$1 \text{ Aar} = \frac{q+r}{r} a + b$$

$$2 \text{ Aar} = \left(\frac{q+r}{r}\right) a + \frac{q+r}{r} b + b$$

$$3 \text{ Aar} = \left(\frac{q+r}{r}\right)^2 a + \left(\frac{q+r}{r}\right) b + \left(\frac{q+r}{r}\right) b + b$$

$$n \text{ Aar} = \left(\frac{q+r}{r}\right)^n a + \left(\frac{q+r}{r}\right)^{n-1} b + \left(\frac{q+r}{r}\right)^{n-2} b + \left(\frac{q+r}{r}\right) b + b.$$

Capitalen bestaaer altsaa efter n Aar af to Dele,

nemlig 1) $\left(\frac{q+r}{r}\right)^n a$, og 2) en geometrisk Række,

hvis første Led er b , ledenes Antal n , og For-

holdsgavnet (Exponenten) $\frac{q+r}{r}$. Summen af

denne findes (§. 66) efter Formlen $\frac{m^n q - a}{m - 1}$

$$\text{at være} = \frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - b}{\frac{q+r}{r} - 1} = \frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - b}{\frac{q}{r}}$$

her

hertil lægges den første Deel $\left(\frac{q+r}{r}\right)^n a$ og vi faae
 Værdien af den hele Capital efter n Aar $=$

$$\frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n a + \left(\frac{q+r}{r}\right)^n b - rb}{q}$$

Ann. Formindskes Capitalen ved hvert Aar at
 fratrage en bestemt Summa, da er Formen den sam-
 me, kun at de to Dele, man tilsidst faaer, forbind-
 es med $-$; og man finder hvad der af den første
 Capital a bliver til Rest efter n Aar naar hvert Aar
 en bestemt Summe b fratrages $= \left(\frac{q+r}{r}\right)^n a -$

$$\frac{\left(\frac{q+r}{r}\right)^n b + rb}{q}$$

§. 93.
 3die Opgave. Hvormeget er tilovers efter
 20 Aars Forløb af 10000 Rdlr. med Rente
 og Rentens Rente, naar hvert Aar fortæres
 600 Rdlr?

Sætte vi Renten 5 Procent $= \frac{1}{20}$ saa
 have vi $q = 1$, $r = 20$, $a = 10000$, $n =$
 20 , $b = 600$; den søgte Rest, altsaa efter For-
 men $= \left(\frac{21}{20}\right)^n a - \left(\frac{21}{20}\right)^n \times 20b + 20b =$
 $\left(\frac{21}{20}\right)^n \times (a - 20b) + 20b$. Er nu, som i
 næste

nærværende Exempel, $b > \frac{1}{2}a$, saa er $20b$

$$> a; \text{ Resten bliver altsaa } = 20b - \left(\frac{21}{20}\right)^n \times$$

$(20b - a)$; folgelig findes den søgte Rest naar man adderer $n \text{ Log. } \frac{21}{20} + \text{Log. } (20b - a)$ og subtraherer det til den fundne Logarithme svarende Tal fra $20b$. Altsaa i nærværende Opgave

$$20 \text{ Log. } \frac{21}{20} = 0,4237860$$

$$\text{Log. } (20 \times 600 - 10000) = 3,3010300$$

$$3,7248160, \text{ som}$$

findes at være Log. 5306; dette subtraheret fra $20b = 12000$ giver Rest 6694 Rdlr., som er det der bliver tilbage af Capitalen efter 20 Aar.

Till. 1. Forandres Spørgsmaalet saaledes, at der spørges: hvorlænge det vil være inden Capitalen a er fortæret? Na sees let, at n i forrige Form er her den søgte Størrelse, og at Betingelsen fører det med sig, at Resten, i det Øieblik Capitalen er fortærrt, er $= 0$, og folgelig

$$20b - \left(\frac{21}{20}\right)^n \times (20b - a) = 0$$

$$\text{eller } 20b = \left(\frac{21}{20}\right)^n \times (20b - a)$$

$$\text{altsaa Log. } 20b = n \text{ Log. } \frac{21}{20} + \text{Log. } (20b - a)$$

$$\text{Log. } 20b - \text{Log. } (20b - a) = n \text{ Log. } \frac{21}{20}$$

Log.

$$\log. \left(\frac{20b}{20b-a} \right) : \log. \frac{21}{20} = n$$

$$\log. \left(\frac{12000}{20000} \right) = \log. 6 \text{ og } n =$$

$$\frac{\log. 6}{\log. \frac{21}{20}} = \frac{0,7781512}{0,0211893} = 36 \text{ Aar 8 Maanedes}$$

$$22 \text{ Dage.}$$

Till. 2. Hvor stor en Capital a maae man afsætte for at sikre sig en vis aarlig Indtægt b i n Aar?

$$\text{Af Ligningen } 20b = \left(\frac{21}{10} \right)^n 20b + \left(\frac{21}{20} \right)^n a$$

$$= 0 \text{ findes } \left(\frac{21}{20} \right)^n a = \left(\frac{21}{20} \right)^n \times 20b - 20b$$

$$\text{og } a = 20b - \frac{20^n \times 20b}{21^n}$$

End Ill Ex. være $b = 600$, $n = 20$, saa er

$$\log. 20b = 4,0791812$$

$$20 \times \log. 20 = 20,0206000$$

$$\log. 20b + 20 \log. 20 = 20,0997812$$

$$20 \log. 21 = 26,4443860$$

$$\log. \left(\frac{20^n \times 20b}{21^n} \right) = 3,6553952 \text{ som}$$

er $\log. 4522$, der subtraheres fra $20b$, som her er $20 \times 600 = 12000$; og saaledes er $12000 - 4522 = 7478$ Rdlr. den Capital, som der efter

efter den antagne Rentefod udfordres, for i 20 Aar at have 600 Rdlr. aarlig Indkomst.

§. 94.

Forklar. Saaledes som Renten eller den bestemte Indtægt hidtil er anseet, er den noget Vist, og bliver saaledes bestemt, at Capital til- ligemed de aarlige Renter derved i et vist Antal Aar, fortæres. Den kaldes Rente for en be- stemt Tid, og kan arves. Livrente derimod kal- des den, som kun udbetales til Risberens Døds- dag, og kan beregnes paa samme Maade som Tid- Rente, (§. 93), kun at der ikke er et bestemt Tal, men maae bestemmes efter Risberens Alder og Mortalitetstabel. Ved de Interessenter, der dse tidligen, vinder Kassen hvad den taber ved dem, der leve længere end den efter Rimelighed beregnede Tid. Efter Deparcieur er efter Mid- deltal den Tid, en Person paa 45 Aar endnu kan vente at leve, 20 Aar; hvormed man kunde give ham aarlig i Livrente for 1000 Rdlr. Indskud be- regnes efter §. 93, og man faar 80 $\frac{1}{4}$ Rdlr. eller 8 Procent.

En Contine er ligeledes en Slags Livrente, dog med det Særegne, at Interessenterne arve hinanden, og den Bortdødes Deel fordeles imel- lem de endnu Levende, indtil alle Deeltagende ere ud-

adde. Ratnet har denne Slags Løbende af en Neapolitaner Lorenzo Conti, som først gjorde den bekendt i Frankrig. Den første oprettedes Aar 1689, hvor Actie kostede 300 Liores; en Barbeersente, der blev 96 Aar gammel, fik tilfødt 73500 Liores.

X. Om forskjellige enkelte Ting's Omsetninger og Forbindelser (transpositionibus et combinationibus).

§. 95.

1. ste Opgave. At finde alle de mulige Ordre, hvori et Antal givne Ting, som Begreberne *a, b, c, d* eller Tallene 1, 2, 3, 4 kan stilles, saaledes, at den ene ikke er fuldkommen og i alle Henseender den samme som den anden.

Oplosn. Har *a* alene givne, saa er kun een Orden mulig; kommer *b* til, kan det sættes for eller efter *a*, nemlig *ab* og *ba*; her er altsaa 2 eller 2×1 Omsetning; kommer endvidere *c* til, saa kan det sættes saavel til *ab* som *ba* foran, i Midten og ved Enden, og vi have da $3 \times 2 \times 1$ Ordre.

Omsætninger, nemlig:

I) *c* til *ab*

cab, acb, aba.

II) *c* til *ab*

sba, bsa, bac.

Ligesaa naar det fjerde Bogstav *d* kommer til, sam-
 lyt ses til enhver af disse 6 Ordener paa 4 for-
 skjellige Raader, nemlig foran, imellem første og
 andet, imellem andet og tredje, samt ved Enden.
 Dette giver altsaa imellem fire Ting $6 \times 4 =$
 $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ Omsætninger. Paa
 samme Raade indsees, at naar det femte Bogstav
e kom til, vilde det kunde sættes til enhver af disse
 24 Ordener paa fem forskellige Raader, og man
 vilde saaledes faae $5 \times 24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$
 $\times 5 = 120$ Ordener. I Almindelighed vil altsaa
n Ting give $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ Omsætninge
 ger eller Ordener. Eller naar man begynder med
 den højeste Faktor, saa giver *n* Ting $n \times (n-1)$
 $\times (n-2) \times (n-3) \dots n - (n-1)$; thi
 $n - (n-1) = n - n + 1 = 1$.

Exemp. Paa hvor mange Raader kunde 8
 Toner afveje med hinanden? Efter den udfundne
 Form $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$
 40320 Raader.

I hvormange forskellige Ordener kunde 40 Kort
 lægges? $40 \times 39 \times 38 \dots 1 \times 1$, som ud-
 gjør et Tal der overstiger 2 Odstillioner.

Sil.

Ex. 1. Naar imellem de Ting, hvorom man vil vide, i hørmange forskellige Ordener de kan stilles, ere nogle af een og samme Art; som f. Ex. naar imellem m Bogstaver a forekommer m Gange og b forekommer p Gange, bliver Formen til at finde Omsetningernes Antal

$$m \times (m-1) \times (m-2) \dots 3 \times 2 \times 1$$

$$n \times (n-1) \dots 3 \times 2 \times 1 \times p \times (p-1) \dots 3 \times 2 \times 1$$

Ex. lad de givne Størrelser være b, a, a , saa skalde a, a , naar de vare forskellige, give to Omsetninger; men da de nu er eens, saa kan b med dem ikke give $3 \times 2 \times 1$, men allene $3 \times 1 =$

$$\frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2} \text{ Omsetninger. Ligeledes skalde } cbbaa,$$

naar alle Bogstaverne vare forskellige, give $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ Omsetninger; var de to sidste allene de samme, og de øvrige forskellige, faae vi $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$. Men da

nu baade andet, tredje og fjerde ere de samme, saa

$$\text{ere i det Hele kun } \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}$$

60 Omsetninger mulige.

Exemp. 1) De fire Bogstaver i Ordet *amor* kan omsettes $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ Gange; deraf kan man udfinde de saakaldte Anagrammer.

2) Or.

2) Ordet *Studio* har 9 Bogstaver, hvorimellem ere tre s og to u; Antallet af deres Omsætninger er

$$\text{altsaa} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}$$

§. 96.

Defl. Forbindelser (combinations) kaldes flere Ting's Sammenstilling efter et vist Tal, som bestemmer Classen af Forbindelsen og kaldes Classens Exponent; da saaledes 1, 2, 3, 4, 5 og følgende Classer indeholde Unioner, Binioner, Trinioner, Quaternioner o. s. v., eller enkelte, Amber, Terner, Quarterner o. s. v., hvort enten enhver Ting maae igientages, eller og ingen Gjentagelse maae finde Sted.

§. 97.

2den Opgave. Naar der ere givne n forskellige Ting, at finde hvormange Binioner eller Amber, hvormange Trinioner eller Terner, hvormange Quaternioner eller Quarterner o. s. v., eller, som det og udtryffes, hvormange Forbindelser af 2den, 3die, 4de 2c. Klasse man deraf kan gjøre.

Oplosn. 1. Sæt at Bogstaverne $a, b, c, d,$ 2c., i alt n , vare givne, og der spørges: hvormange

mange Amber eller Forbindelser af 2den Klasse deraf kan gøres? Man lader da først a være bort og beholder b, c, d, e, \dots eller $n - 1$ Bogstaver; med ethvert af disse gjør a en Ambe: man faaer da $(n - 1)$ Amber. Lades b ligeledes ude, saa beholder man a, c, d, e , og b gjør med ethvert af disse en Ambe, altsaa i alt $(n - 1)$ Ambe. Da nu ethvert af de n Bogstaver saaledes kan affondres og siden forenes med de øbrige $n - 1$; saa giver i Almindelighed n Ting $n \times (n - 1)$ Amber; saaledes

| | | | |
|-------|-------|-------|------|
| $ab,$ | $ac,$ | $ad,$ | ae |
| $ba,$ | $bc,$ | $bd,$ | be |
| $ca,$ | $cb,$ | $cd,$ | ce |
| $da,$ | $db,$ | $de,$ | de |
| $ea,$ | $eb,$ | $ec,$ | ed |

Men da ab og ba , ac og ca o. s. v. kun gielder for en Ambe, saa er det klart, at det egentlige Antal af de virkelig forskellige Amber her er $\frac{n(n-1)}{1 \times 2}$.

2. Soges de mulige Terner (eller Forbindelser af tredje Klasse) af n Ting, f. Ex. af de samme Bogstaver a, b, c, d, e ; saa vilde, ligesom $(n - 1)$

Ting give $\frac{(n-1)(n-2)}{1 \times 2}$ Amber: af samme Grund

bede give Amber bc, bd, be, cd, ce, de ; sætter man

nu til enhver Ambe Bogstavet a , saa faaer man

$$\frac{(n-1) \times (n-2)}{1 \times 2}$$
 Terner. Ligesaa faaer man,

naar man til Amberne af Bogstaverne a, c, d, e
 sætter b , paa nu
$$\frac{(n-1) \times (n-2)}{1 \times 2}$$
 Terner; og

da dette kan igientages n Gange, saa faaer man
 ialt
$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2}$$
 Terner. Af de

givne Bogstaver $abcde$ altsaa følgende:

| | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| abc | abd | abe | acd | ace | ade |
| bac | bad | bae | bcd | bce | bde |
| cab | cad | cae | cbd | cbe | cde |
| dab | dac | dae | dbc | dbe | dcd |
| eab | eac | ead | ebc | ebd | ecd |

Man seer her igien, at da Ternerne abc, bac, cab
 og saaledes enhver Combination hvor de samme tre
 Bogstaver forekomme men i forskiellig Orden, kun
 kan gielde for een Terner; man maae derfor dividere
 den fundne Formel med 3, man finder da at

n Ting give
$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3}$$
 Terner.

3. Paa samme Maade findes, at n Ting giver

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$
 Forbindelser

af 4de Klasse eller Quaterner, og overhovedet at

$$\text{de givne } \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \dots (n-m+1)}{1 \times 2 \times 3 \dots \times m}$$

Combinationer af *m*te Klasse.

Till. Heraf udledes denne almindelige Regel: Man søger to arithmetiske Rækker, hvori Ledenes Difference er Tallet Een; først en aftagende, hvor det første Led er Antallet af de givne Ting; og for det andet en tiltagende, som begynder med 1. Ledenes Antal i begge bliver ligestort med Tallet, der viser, hvormange Stykker der skal combineres (5: som viser, om der søges Amber, Terner &c.). Produktet af Ledene i første Række divideres derpaa med Produktet af Ledene i den anden; og Quotienten giver Antallet af alle muelige Combinationer.

§. 98.

Disse beregnede Former tiene til at bestemme Rimeligheden af Tab og Gevinst i de saakaldte Lykke- eller Hazardspil.

B. Ex. I) Hvor stor er Rimeligheden, at man med tre Tærninger kan kaste lutter Sejer? Da hver Tærning har sex Sider, bliver alle muelige

$$\text{Rast med forskellige Dine} = \frac{18 \times 17 \times 16}{1 \times 2 \times 3} =$$

816. Imellem disse er det forlangte Rast eengang; Rimeligheden til at faae disse Dine er altsaa til Rimeligheden, ikke at faae dem, som 1 : 816.

II)

II) I det saakaldte Talletterie bliver, som bekendt, af 90 Nummere fem udtrukne; hvad Rimelighed er der, naar man har besat fem vilkaarlige Nummere (af de 90) til Udtræk, Ambe, Terne og Qvaterne; at erholde een af disse Gevinster? Rimeligheden til at erholde 1) Et Udtræk findes $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$: Rimeligheden til at faae et Udtræk forholder sig til den, ikke at faae det som 1 : 18.

2. En Ambe: Fem Nummere indeholde $\frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$ Amber, 90 Nummere indeholde $\frac{90 \times 89}{1 \times 2} = 4005$ Amber; Rimeligheden er altsaa til Urimeligheden som 10 : 4005 eller 1 : 400,5.

3. En Terne: I fem Nummere ere $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3}$
 $= 10$ Terner, i 90 ere $\frac{90 \times 89 \times 88}{1 \times 2 \times 3} = 117480$ Terner; Rimeligheden til Ternen altsaa mod Urimeligheden som 10 : 117480 $= 1 : 11748$.

4. En Qvaterne: I fem Nummere ere 5 og i 90 Nummere 2554590 Qvaterne; altsaa er Rimeligheden til, i fem Nummere at faae en Qvaterne, mod Urimeligheden som 5 : 2554590 eller 1 : 510918.

III) Hvor mange forskiellige Spil ere mulige i L'hombre? Da hver af de Spillende faaer 9 Kort,

$$\text{bliver Svaret} = \frac{40 \times 30 \times 38 \times 37 \times 36 \times 35}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$$

$$\frac{\times 34 \times 33 \times 32}{\times 7 \times 8 \times 9} = 273438880. \quad \text{Dette Tal}$$

maa endnu multipliceres med 3, som er de Spillendes Antal, efterdi det er ikke ligegyldigt, om man af de Spillende er den første, anden eller tredie.

Fremdeles: da 40 Kort indeholde 780 Amber og 9 Kort 36 Amber (§. 96), saa er Rimeligheden til at erholde en bestemt Ambe, f. Ex. Spadille og Basta samlede i eet Spil, mod Urimeligheden som 36:780 eller $1:21\frac{2}{3}$: man kan omtrent regne i 22 Spil eengang at have disse to Kort samlede.

Anm. Foruden den her viste Anvendelse finder denne Regel Sted til at bestemme de mulige Tilfælde i Videnskaberne, f. Ex. alle de Maader, hvorpaa Midbelordet i en Syllogismus kan sætes.

G e o m e t r i e.

Anden Deel.

L æ r e o m L e g e m e r

eller

S t e r e o m e t r i e.

I. Om rette Liniers og Planers Beliggenhed mod hinanden.

(See Geometrie første Deel §. 102.)

§. 109.

Forklaring. En ret Linie AB siges at staae lodret paa en Plan MN (Fig. XXI. Tab. 4), naar den gjør rette Vinkler med alle de rette Linier CB , BG , BK &c., der i Planen kan trækkes igiennem Punktet B , hvor Linien træffer Planen.

§. 110.

Forkl. En ret Linies DF Vøining eller Høiding mod en Plan AB (Fig. XIX) bestemmes ved den Vinkel, som den gjør med en Linie DG , der trækkes i Planen fra Punktet D , hvor Linien skærer Planen, til det Punkt G , hvor en fra et i Linien FD vilkaarligt Punkt fældet Perpendicular trækker Planen AB .

Fig.

Till. At denne Bøiningssvinkel bliver spids, er klart (Plan-Geometrie §. 18 Till. 3) naar man tænker sig en Plan lagt giennem Punkterne *DFG*.

§. 111.

Forklar. To Planers *MK* og *HK* (Fig. XVIII) Bøining mod hinanden bestemmes ved den Vinkel, der dannes, naar fra et Punkt *N* i deres Skærringslinje (der bliver fælles for begge Planer) *LK*, opreises i begge Planer de lodrette Linier *NP* og *NQ*; den af disse Linier dannede Vinkel *PNQ* kaldes derfor, Planernes Bøimings- (Inclinations-) Vinkel.

Till. Er denne Vinkel ret, da staaer den ene Plan lodret paa den anden.

§. 112.

Læres. Naar to Punkter *CD* af en ret Linie (Fig. XIX) ligge i en Plan *AB*, ligger hele Linien i samme Plan.

Beviis. Stykket *CD* er efter Betingelsen i Planen *AB*; sæt nu, at Linien lod sig forlænge uden for Planen, og at *DF* var et saadant uden for Planen forlænget Stykke, og man forlængede Linien *CD* i Planen til *E* (Geom. §. 3), saa havde de to rette Linier *CDF* og *CDE* Stykket *CD* tilfælles, som er umueligt.

Till.

Till. 1. En Plans Beliggenhed bestemmes ved tre Punkter, der ikke ligge i samme rette Linie; og igiennem tre givne Punkter lader sig altid lægge en Plan. Have to forskellige Planer altsaa tre Punkter tilfælles, som ikke ligge i en ret Linie, da falde de sammen.

Anm. Et Vord paa tre Been staaer derfor altid, endog paa et ujevnt Gulv, uden at rokke.

Till. 2. Skiare to Planer hinanden, som Planen MK og HK (Fig. XVIII), da er deres Skæringslinie LK en ret Linie.

§. 119.

Læresætn. Staaer en ret Linie AB (Fig. XXI) lodret paa to rette Linier CD og EF , der skiare hinanden i Punktet B , hvor Linien berører Planen MN , da staaer den ogsaa lodret paa alle de rette Linier, der i samme Plan MN kan trækkes igiennem Punktet B , d. e. den staaer lodret paa Planen MN (§. 109).

Beviis. Man giøre $CB = BD$, $BF = BE$, trække derpaa igiennem B en tredje vilforlig Linie, og Linierne EC og FD , som vil skiare den vilforlige Linie i G og K , videre drages fra A Linierne AC , AG , AE , AD , AK og AF . Nu ere

1) $\triangle CBE = \triangle BFD$ (Geom. §. 12);
 følgende $CE = FD$; $\angle BDE = \angle BDF$;
 og $\angle BEC = \angle BFD$.

2) $\triangle BGC = \triangle BKD$ (§. 15); altsaa $CG = KD$, og $BG = BK$.

3) $\triangle EAB = \triangle BAF$ (§. 12), derfor $EA = AF$.

4) $\triangle ACB = \triangle ABD$ (§. 12) og $AC = AD$.

5) $\triangle ACE = \triangle ADF$; thi $CE = FD$
 (No. 1) $AC = AD$ og $AE = AF$ (No. 3 og 4),
 altsaa $\angle ADK = \angle ACG$.

6) $\triangle ACG = \triangle ADK$, da $CG = KD$
 (No. 2) $CA = AD$ No. 4) og $\angle ACG = \angle ADK$ (No. 5),
 følgende $AG = AK$.

7) Nu er $AG = AK$ (No. 6), $BG = BK$ (No. 2),
 $AB = AB$, følgende (§. 14) $\triangle AGB = \triangle ABK$ og
 $\angle ABG = \angle ABK = R$ (§. 7) og Linien AB lodret paa GB og BK .

Paa samme Maade kan bevisees, at AB er lodret paa enhver igiennem Punctet B i Planen MN trukket ret Linie, og altsaa lodret paa Planen MN .

Anm. Dette er det Euclidiske Bevis, saaledes som det findes i hans Element. (II B. 4 S.), som i mine Tanter er for denne Sætning det eneste strengt mathematisk rigtige; dog tilstaaer jeg, at man gjerne kan

kan for Begyndere, for hvilke Oversigten af dette Beviis maaskee kunde være vanskeligt, gjøre Sætningen begribelig paa en anden Maade, nemlig ved at tænke sig en Plan lagt igiennem Punkterne ABD , der da vilde blive en retvinklet Triangel, og forestille sig den omsørt i Planen MN ; blev nu Linien BD i samme Plan og AB ubevægelig, vilde BD , naar den efterhaanden kom i Beliggenhederne BE , BG , BC , dog stedse bl holde samme Stilling mod AB : stedse gjøre med AB en ret Vinkel.

§. 114.

Læres. \times Staaer en Linie AB (Fig. XXI) lodret paa tre forskellige rette Linier BG , BD og BF , der støde sammen i Punkter B , da ligge disse Linier alle i een og samme Plan.

Beviis. Man forestille sig en Plan MN lagt igiennem Punkterne GBD (§. 112. Till.). Var nu BF ikke i denne Plan, men udenfor, saa forestille man sig en anden Plan, lagt igiennem ABF , som, tilbørlig forlænget, maatte skære Planen MN i den rette Linie BK (§. 112. Till. 2). Men efter Betingelsen er AB lodret paa BG og BD , altsaa ogsaa paa BK (§. 113), følgelig $\angle ABK = R = \angle ABF$, som er umueligt. (Arithm. §. 38. No. 2).

Till. 1. Fra et Punkt udenfor en Plan kan kun føldes en eeneste lodret Linie paa Planen; thi
sæt

Tæt (Fig. XXI), at foruden AB ogsaa AE var lodret paa Planen MN , saa var i Trianglen ABE Vinklen $AEB = R = ABE$, som er umueligt (§. 18. Till. 3).

Till. 2. Den lodrette Linie AB er fortere end enhver anden fra Punktet A paa Planen MN faldet Linie.

§. 115.

Læresæt. 1) Staae to Linier AB og CD lodrette paa een og samme Flade MN , da ere de parallelle; 2) ere de derimod parallelle, og den eene staaer lodret paa Fladen MN , da staaer den anden ogsaa lodret paa samme Flade.

Bevist 1. Man drage (Fig. XVII) i Planen MN Linien BD , og opreise paa Enden af den den lodrette Linie $DG = AB$ og trække BG , AG og AD , saa er $\triangle ABD = GDB$ (§. 12) og $AD = BG$; da nu ogsaa $AB = DG$ og AG tilfældes, saa er $\triangle ABG = \triangle ADG$, følgelig $\angle GDA = \angle GBA = R = \angle GDB = \angle GDC$ (§. 109) og Linierne GD , DA , DB i een og samme Plan (§. 114), i hvilken ogsaa AB er.

Linierne AB og CD ere ogsaa i een og samme Plan, og da Vinklerne $ABD + CDB$ ere $= 2R$, ere de parallelle.

2. Man

2. Man trække de samme Forberedelses Linier som før, og man faaer Vinkelen $GDA = R$, følgelig GD lodret paa Planen BDA (§. 109); i samme Plan er ogsaa Parallelen CD , altsaa naar $\angle ABD = R$, er ogsaa $\angle CDB = R$ og saaledes CD lodret paa Planen MN .

§. 116.

Læres. To rette Linier AD og BF (Fig. XXIII), der ere parallelle med en tredie CE (om den endog ikke ligger i samme Plan) ere indbyrdes parallelle.

Bevlis. Man opretter fra et Punkt i Linien CE to lodrette Linier, den ene CA i Planen CD , den anden CB i Planen CF , saa er Linien EC lodret paa en Plan lagt igiennem Punkterne ACB (§. 113), følgelig ogsaa dens Paralleler AD og BF lodrette paa Planen ACB (§. 115. No 2), og altsaa AD og BF selv parallelle (§. 115. No. 1).

§. 117.

Læresæt. To Vinkler ACB og DEF (Fig. XXIII), der ligge i forskellige Planer, hvori AC er parallel med DE , og CB med EF , og have samme Beliggenhed mod den Linie EC , der forbinder deres Toppunkter, ere lige store.

Bevlis.

Beviis. Man giv $DE = AC$, $EF = CB$, og trække Linierne AB , DF , FB og DA , saa ere AD og BF parallelle med CE , følgelig selv parallelle og ligestore (§. 30), og altsaa $AB = DF$; følgelig $\triangle BCB = \triangle DEF$ og Vinklen $ACB = \angle DEF$.

§. 118.

Opgave. Fra et givet Punkt N udenfor en Plan CD (Fig. XX) at fælde en lodret Linie paa Planen.

Oplosn. I Planen CD trækker man en vilkaarlig Linie AB og lader derpaa fra det givne Punkt N falde en lodret Linie NP ; fra Punktet P oprettes i Planen CD en lodret Linie PM , fra N fældes derpaa en lodret Linie NR paa PM , som da vil være lodret paa Planen CD .

Beviis. Igjennem R trækkes en Linie KL parallel med AB . Efter Constructionen staaer PB lodret paa PR og PN , altsaa ogsaa paa Planen NPR (§. 113), og følgelig KL lodret paa samme Plan; saaledes er Vinklen $LRN = R$, men efter Construction har $NRP = R$, og følgelig NR lodret paa Planen CD .

Till. Fra et Punkt M i en Plan opreises en lodret Linie MO , naar man fra et Punkt N udenfor Planen fælder en Linie NR lodret paa Planen og gior Linien MO parallel med NR .

§. 119.

Forkl. Planerne CD og AB (Fig. XXV Tab. 5) kaldes parallelle, naar de, i hvor langt de end forlænges, aldrig skiere hinanden.

Till. 1. Skieres disse parallelle Planer med en tredje Plan EF , da ere Siennemsnitslinierne GK og LO parallelle, thi de ligge begge i een Plan, nemlig i Skieringsplanen EF , men de ligge tilføjelige hver i sin af de andre to Planer, og kunde altsaa forlængede aldrig møde hinanden uden at de to parallelle Planer stødte sammen, som er imod Forklaringen og Betingelsen.

Till. 2. Staaer een og samme rette Linie lodret paa to forskellige Planer, da ere de parallelle; thi vare de ikke parallelle, vilde de forlængede skiere hinanden som Planerne CD og EF (Fig. XX Tab. 4), og da kunde een og samme Linie ikke være lodret paa dem begge. Fra et vilkaarligt Punkt N i den ene Plan EF fældes en lodret Linie NR paa den anden CD , i Planen EF , trækkes fra N til Siennemsnitslinien AB en vilkaarlig Linie NP og i CD Linien PR . Var nu NR ogsaa lodret

paa Planen EF , saa var der i Triangelen NPR to rette Vinkler, som efter de forhen bestemte ~~End~~ ~~ninger~~ er umuligt.

§. 120.

O p g a v e. Igennem et givet Punkt A udenfor Planen BC (Fig. XXVII) at lægge en Plan, parallel med BC .

Oplosn. Fra A fældes paa BC den lodrette Linie AD (§. 118), i BC trækkes de vilkaarlige Linier DF , DE , og igennem A Linien AH parallel med DF og AG parallel med DE . En Flade, lagt igennem AHG , vil da være parallel med BC (§. 119), thi DA er ogsaa lodret paa HAG (§. 109) (thi da den er lodret paa BC , saa er $\angle ADF = R$, altsaa $\angle DAH = R$; ligesledes er $\angle ADE = R$, folgelig og $DAG = R$).

Till. 1. Igennem et Punkt kan kun lægges een Plan parallel med en anden.

Till. 2. Ere to Planer parallelle og en ret Linie er lodret paa den eene af dem, da er den tilføjede lodret paa den anden; to lodrette Linier imellem to parallelle Planer ere parallelle og ligestore.

§. 121.

L e t e s. Staaer Linien AD (Fig. XXIV) lodret paa Planen BC , saa er en Plan, lagt igien-

igikennem Linien AD , ligeledes lodret paa BC .

Bevis. Lad EF være Linien, hvor den gien-
nem AD lagte Plan skærer BC ; fra et vilkørligt
Punkt G i Fladen BC trækkes Linien DG lodret
paa EF , saa er $\angle ADG = R$ (§. 109), men
Vinklen ADG er Bøiningsvinklen for Planerne
(§. 109. Till.); de ere altsaa lodrette paa hinanden

Modsatn. Staaer en Plan FH (Fig.
XXIV) lodret paa en anden Plan, saa er en i
Planen FH paa Gennemsnitslinien EF fældet
lodret Linie AD ogsaa lodret paa Planen BC .

Bevis. Man trækker den lodrette Linie DG ,
saa er Vinklen ADG (Planernes Bøiningsvinkel)
 $= R$ og $\angle ADF = R$ (efter Tegning), følger
lig Linien AD lodret paa Planen BC (§. 109).

§. 122.

L e r e s. Overføres to parallelle Planer
 AB og CD (Fig. XXV) af en tredie EF , saa
ere Bøiningsvinklerne, HMN og HPQ , som
den skærende Plan gjør med begge de paral-
lele Planer, ligestore.

Bevis. Linierne GH og LO ere parallelle
(§. 119); man antager HM at staae lodret paa GK
og HP paa LO , og tænker sig igiennem H lagt
en Plan lodret paa EF (§. 121), den vil da skære

de to parallelle Planer CD og AB i Linierne MN og PQ . Vinklerne HMN og HPQ blive da den skærende Plans Vinningsvinkler mod de parallelle Planer, og blive ligestore.

§. 123.

Læres. Naar to Planer AM og CN (Fig. XXVI), det skæere hinanden i Linien GH , ere lodrette paa en tredie EF , saa er ogsaa deres Skæringsslinie GH lodret paa EF .

Bevist. Man opreiser paa HN (s: Siennemsnitsslinien af Planerne CN og EF) en lodret Linie HK , og paa HM (Siennemsnitsslien af Planerne AM og EF) en lodret Linie HL , saa er HK lodret paa Planen CN (§. 121), ligeledes HL paa Planen AM , folgelig $\angle GHK = R = \angle GHL$ og Linien GH lodret paa EF (§. 109).

II. Om geometriske Legemer i Almindelighed.

§. 124.

Forsl. Et til alle Sider begrændset Rum kaldes et geometrisk Legeme (§. 1); disse Grændser, der ere Glader, rette eller frumme, bestemme Legemets Figur.

Lill. 1. En eeneste ret Glade eller Plan kan selvfølgelig ikke indslutte noget bestemt legemligt Rum, men behørig udvidet deler den ethvert Rum i to Dele.

Lill. 2. Endog to eller tre Planer kunde ikke indslutte noget Legeme. Man tænke sig f. Ex. en Plan *CBD* (Fig. XXXVIII. a.), man lægge igiennem dens ene Sidelinie en anden Plan *ACB*, og lægge endvidere igiennem Punkterne *ACD* en tredje Plan *DCA*, saa vil endnu denne tilføjemed de to forrige ikke indslutte noget Rum, men dertil udfordres endnu en fjerde Plan, som maae overflære de tre nævnte Planer et eller andet Sted, f. Ex. i Punkterne *A, D, B*.

§. 125.

F o r f l. Ved det saaledes frembragte Legeme *ACDB* (Fig. XXXVIII. a.) kaldes dets Grændser, som ere Gladerne *ACB, ACD* &c., Sideflader, og Linierne *AC, BC* o. s. v. Sidelinier. Er som her alle Sidefladerne Planer eller rette Glader, kaldes det et kantet Legeme. En Kant, et Hjørne; eller som det og udtrykkes, en solid Vinkel dannes i ethvert Punkt paa Legemets Overflade, hvorigiennem tre eller flere Planer ere lagte, som her i Punkterne *C, A, B, D*.

Lill.

Till. En solid eller legemlig Vinkel kunde ogsaa defineres saaledes: at den dannes, naar to eller flere Planer skjære hinanden saaledes, at deres Skæringslinier løbe sammen i et Punkt; der da bliver den solide Vinkels Top-Punkt, eller og, naar tre eller fire rette Linier, hvoraf dog kun to ligge i samme Plan, støde sammen i et Punkt, som da og kan kaldes den solide Vinkels Spidse eller Toppunkt.

Anm. 1. Man kan forestille sig den solide Vinkel *A* (Fig. XXXVIII. a) saaledes, at Punktet *A* tænkes over Fladen af Papiret, og at detsfra være trukne Linierne *AC*, *AD*, *AB* i forskellige Planer ned paa Papirets Plan; efter Antallet af disse Linier (der tillige bestemme Antallet af de plane Vinkler, der indslutte den solide Vinkel), kaldes den solide Vinkel tresidet, firesidet o. s. v.

Anm. 2. En solid Vinkels Størrelse og Egenskab bestemmes ved Antallet af de plane Vinkler, der dannes den, og ved Fladernes Vøining mod hinanden.

Anm. 3. Summen af alle de plane Vinkler, der støde sammen for at danne en solid Vinkel, er altid mindre end fire rette Vinkler.

§. 126.

Endnu paa mangfoldig forskjellige Maader kunde Planer lægges saaledes mod hinanden, at de indslutte et legemligt Rum; men af disse blive her kun

Fun de mærkeligste, hvis Udmaaling den elementaire Geometrie kan lære, anfarte og beregnede.

Lad til Ex. $ABCDE$ (Fig. XXVIII. b.) være en i en Plan liggende retlinet Figur. Man opreise Linien Aa under en vilkaarlig Vøining mod Planen MN . Igiennem Aa og B lægge man en Plan, hvori man gjør Bb parallel med Aa . Ligesledes lægge man igiennem Bb og C en Plan, hvori man gjør Cc parallel med Bb ; og ved saaledes at vedblive igiennem alle Vinkelspidserne i den plane Figur $ABCDE$, faaer man Planerne Ab , Bc , Cd , De og Ea og Parallellinierne Aa , Bb , Cc , Dd og Ee . Nu lægger man igiennem Punktet a Gladen $abcde$ parallel med $ABCDE$, og der er nu et indsluttet legemlig Rum, der kaldes et Prisme (en kantet Pille, Støtte. De parallelle Glader $ABCDE$ i Planen MN og $abcde$ i Planen OP kaldes Grundflader; de øvrige Glader, som Ab , Bc o. s. v., kaldes Sideflader; og efter deres Antal faaer Prismet Navn af et tresidet, firesidet eller mangesidet Prisme. Høiden af et Prisme er den lodrette Linie imellem begge Grundfladerne eller Grundfladernes Afstand fra hinanden.

Lill. 1. Da Grundfladerne ere parallelle, og salgelig deres og Sidefladernes Giennemsnitslinier AB og ab , BC og bc ogsaa parallelle (§. 120),

og Gennemsnitslinierne af Sidesfladerne Aa Bb &c. ogsaa parallelle, saa ere Sidesfladerne i et Prisme altid Parallelogrammer.

Till. 2. Naar de parallelle Sidelinier i et Prisme, og folgelig ogsaa Sidesfladerne (§. 121), staae lodrette paa Grundfladerne, kaldes det et ret, i modsat Tilfælde et skævt Prisme. I det rette Prisme er Sidesfladernes Høide tillige Prismets Høide.

Till. 3. Ere Grundfladerne i et Prisma Parallelogrammer, kaldes det et Parallelepipedon, som altsaa er et af sex Parallelogrammer indsluttet Læame.

Till. 4. Er et Parallelepipedon ret (Till. 2) og alle sex Flader, hvoraf det indsluttes, ligestore, kaldes det en Kubus eller Terning, der altsaa er et Legeme som indsluttes af sex ligestore Quadrater.

§. 127.

Bliver Grundfladen, som antoges retlinet (§. 126), til en uendelig mangelantet Polygon α : til en Cirkel (§. 101), hvis Middelpunkt er F (Fig. XXXIX), saa trækker man en Linie FG under en vilkaarlig Vøining mod Planen AB indtil den skærer den med AB parallelle Flade CD i G . Fra et Punkt i Peripherien af Grundfladen E trækker man
Linien

Linien EH parallel med GF , saa bliver Siennemsnitslinierne af Gladen $ACGF$ og Gladerne AH og EG 2: Linierne CG og AF parallelle (§. 120). Det samme gielder for enhver anden Linie, der trækkes paa samme Maade som f. Ex. DB . Alle Endepunkter af disse Linier i Gladen CD ere i Omkredsen af en Cirkel, hvis Centrum er G , og som er ligestor med Grundfladen. Lægges nu igiennem Peripherien af begge Cirkler en frum Glaade saaledes, at alle med GF i en Afstand saa stor som Radius FA eller FB trukne Paralleler falde i denne frumme Glade, saa vil den tilsigemed begge Cirklerne indslutte et legemligt Rum, der kaldes en Cylinder eller Rulle (Balse). Begge de parallelle Cirkler kaldes dens Grundflader, den frumme Glade den cylindriske Overflade. Linien GF , der forbinder begge Cirklernes Centra, faaer Navn af Cylinders Axel. Er denne Axel lodret paa Grundfladen, faaer Cylinderen Navn af ret (Fig. XXXVIII) i modsat Tilfælde skævt (Fig. XXXIX).

Till. 1. Man kan forestille sig, at en Cylinder bliver til i det Cirklen CHD bevæger sig ned mod Cirklen AEB saaledes, at dens Glade stedse bliver parallel med sig selv. En ret Cylinder dannes, naar en Rectangel dreier sig om dens ene Sidelinie som om en ubevægelig Axel.

Till.

Lill. 2. Antages AE uendelig lille (mindre end enhver nok saa liden given Størrelse), saa kan man antage $AEHC$ som en uendelig lille Flade, og den cylindriske Overflade at bestaae af lutter saadanne uendelig smaae Flader, d. e. Cylinderen kan antages at være et uendelig mangesidet Prisme.

§. 128.

Foreskifter man sig en solid Vinkels Sideskader (Fig. XXXVIII. a.) ACB , BCD og ACD at overføres af en Plan ADB , saa fremkommer et begrænset legemlig Rum (geometrisk Legeme), der kaldes en Pyramide. Fladen ABD kaldes Grundflade, og Fladerne ACB , BCD og ACD Pyramidens Sideskader. Sideskadernes Antal, der rette sig efter Grundfladens Sidelinier, bestemmer Navnet af tresidet, firesidet og mangesidet Pyramide.

Anm. Er den solide Vinkel, hvis Sideskader overføres, kun indsluttet af tre Planevinkler, som i nærværende Exempel, da sees let, at hele Legemet indsluttes af fire Triangler, og at det er ligegyldigt, hvilken der ansees for Grundflade, da man kan tænke sig Pyramidens Toppunkt saavel i A , B og D , som i C .

Lill. 1. En Pyramide er altsaa et legemligt Rum, der indsluttes af en retlinet Plan-Figur, som

som kaldes Grundflade, og saa mange Triangler, Sidesfladerne, som Grundfladen har Sider, der alle flade sammen i et Punkt udenfor Grundfladen, der kaldes Pyramidens-Spids eller Top. En lodret Linie, faldet fra dette Toppunkt, som *RE* (Fig. XXXII), bestemmer Pyramidens Høide. Er Grundfladen en regulair Plan-Figur og den perpendiculaire Linie fra Pyramidens Top træffer lige i dens Centrum (§. 55. Anm.) da kaldes Pyramiden ret, i modsat Tilfælde skævt.

Till. 2. Læses Grundfladen i Pyramiden at blive en uendelig mangekantet regulair Figur ∞ : en Cirkel, da vil alle Pyramidens Sidesflader, der vilde være uendelig mange smaa Triangler, udgøre en eeneste rum Flade, hvori alle de rette Linier vilde falde, der kunde trækkes fra Pyramidens Top til ethvert Punkt i Cirkelens Omkreds. Et saadant bestemt legemligt Rum kaldes en Kegel (conus) (Fig. XL), Cirklen *AG* Grundfladen, rette Linier fra forskjellige Punkter i Cirkelens Peripherie som *AK* og *GK*, til Toppunktet faae Navn af dens Sider eller Sidelinier. Linien *CK* fra Cirkelens Centrum til Toppen kaldes Keglen's Arel. Staaer denne Arel lodret paa Grundfladen, er Keglen ret, i modsat Tilfælde skævt. Ved Høiden i en Kegel forståes Toppunktets Afstand fra Grundfladen,

fladen, der i den rette Kugle er Aksen selv, men i den skæve en fra Toppen paa den forlængede Grundflade fældet lodret Linie, der altid er mindre end Aksen.

Till. 3. Den rette Kugle AKG (Fig. XL) kan man forestille sig at blive til, naar den ret, vinklede Triangel AKC dreier sig om sin ene Cathete KC som en ubevægelig Arel.

§. 129.

Tænkes en Halvcirkel $AKFHB$ (Fig. XLIV) at dreie sig om sin ubevægelige Diameter AB indtil den igjen kommer i sin første Beliggenhed, saa er det legemlige Rum, igiennem hvilket den har bevæget sig, en Kugle (sphæra). Peripherien af Halvcirklen har beskrevet Kuglens frumme Overflade; alle Punkter i denne, som H, F, K , ligge derfor ligelangt fra Centrum i Halvcirklen, der tillige er Kuglens Center, da deres Afstand derfra er Halvcirkelens Radius; enhver saadan Afstand fra Kuglens Centrum til Overfladen kaldes Kuglens Radius, og det dobbelte deraf Kuglens Diameter.

Till. 2. En Kugle kunde ogsaa defineres at være, et legemligt Rum, indsluttet af en eeneste frum Flade, hvori ethvert Punkt er lige langt fra et vist Punkt inde i Kuglerummet, der kaldes Centrum.

Till.

Till. 2. Linier, der ere lodrette paa Axlen, som IL , GC , NF (Fig. XLIII), vil ved deres Omereining om AD beskrive Cirkler, der blive parallelle med hinanden.

III. Om Prismen og Cyliindere og deres Udmaaling.

§. 130.

Læres. Prismen, hvis Grundflader ere ligedanne og ligestore (congruente), og hvis Sidesflader have samme Bøining mod Grundfladerne, og hvis Høider ere ligestore, passe i hinanden (congruunt).

Beviis. Lægges Grundfladen af det ene paa Grundfladen af det andet, saa falde Sidesfladerne, da de ere antagne at have samme Bøining mod Grundfladerne, ogsaa sammen; og da de øverste Endepunkter af Sidelinierne alle falde i een Plan, saa falder og den anden Grundflade af det ene sammen med den af det andet Prisme: alle Grænser af begge Prismen falde sammen d. e. de passe i hinanden.

§. 131.

(§. 58. Lin. 1), og følgelig Prism. $ACBc$: Prism. $acbE = Aa : aD$.

Beviis 2) Da efter Betingelsen acb er parallel med ACB , og Aa parallel med Bb , saa er Ab et Parallelogram og $AB = ab$; ligesaa $AC = ac$ og $CB = cb$, altsaa $\Delta acb = \Delta ACB$.

Lill. Prismet paa congruente Grundflader, mod hvilke deres Sider have samme Bøining, forholde sig som deres Sider, følgelig ogsaa som de lodrette Linier, der kunde fældes imellem deres Grundflader. Er Prismet ret, ere disse lodrette Linier selv Sidelinier.

§. 133.

Læres. Parallelepipeda, der staae paa samme Grundflade $ABCD$ (Fig. XXX) og have samme Høide eller staae imellem to parallelle Planer, ere ligestore.

Beviis 1) Antage vi, at Parallelepipederne ere AG og AK , og at deres Sidesflader BG og BM , AH og AK ligge i de parallelle Planer $EBCM$ og $FADK$, saa sees let, at de trefladede Prismet $FAILEB$ og $HDKMGC$ paa Gladerne FAI og HDK ere ligestore (§. 130 og §. 34). Fort-

tages

tages nu fra begge disse det trefidede Prisme $HOILGN$ og til begge lægges Prismet $AODCNB$, saa har man Parallelep. $AG =$ Parallelep. AM .

Beviis 2) Antages Parallelepipederne over Grundfladen $ABCD$ at være AG og Am , og altsaa Fladerne BG og Bm , AH og Am ikke at ligge i samme Plan, da tegnes et Parallelepiped AM , hvis Sider RM og AK ligge i samme Planer som BG og AH i Parallelepipedet AG , men Siderne DM og AL i samme Planer som Dm og Al i Parallelepipedet Am , saa er det klart af Beviis 1, at Parallelep. $AM =$ Parallelep. AG , og ligesaa Parallelep. $AM =$ Parallelep. Am , folgelig og $AG = Am$.

Lill. 1. Saavel for Parallelepieder som for Prismer i Almindelighed, at de, naar de staae paa samme eller ligestore Grundflader og have samme Høide, ere ligestore; kunde Beviset maaſkee fatteligere, skøndt mindre strengt, føres saaledes: Ethvert Snit i et Prisme, parallel med Grundfladen, frembringer en Plan ligestor med Grundfladen (§. 132), hvor end Snittet ſkeer; gøres altsaa flere parallelle Snit igiennem to saadanne Prismer eller Parallelepieder (thi ethvert trefidede Prisme er Halvparten af et Parallelepiped, der har samme Høide og dobbelt saa stor Grundflade (§. 131. Lill.),

der have samme eller ligestore Grundflader, blive alle disse ved Snittene frembragte Flader ligestore, og saaledes de to Udstrækninger af Prismerne ligestore overalt; men Høiden var antaget ligestor, altsaa alle tre Udstrækninger af to saadane Prismers eller Parallelepipeders ligestore. Men to regelmæssige Rum, der have alle tre Udstrækninger ligestore, ere fuldkomne ligestore.

Anm. Saaledes findes Beviset ført i Justitsraad Bugges mathematiske Forelæsninger.

Zill. 2. Ogsaa kunde denne Sætning saaledes bevises: Man tænke sig begge Parallelepipeders eller Prismers gennemsnitterne med Planer i en uendelig liden Afstand fra hinanden; derved vilde i dem begge frembringes ligemange uendelig smaae Parallelepipeders eller Prismers, der vilde blive ligestore (§. 130). Men ligemange ligestore Elementer eller Dele maae frembringe ligestore Hele.

§. 134.

Føref. Parallelepipeders paa ligestore, men ikke lignedanne Grundflader ere ligestore (o: indflutte ligestore Rum), naar de have ligestore Høider.

Beviis 1. Lad de ligestore Grundflader i begge Parallelepipeders *ACCDB* og *DEGF* (Fig.

XXX.

XXX. a.) antages at have ligestore Vinkler, de lade sig da let bringe i en saadan Beliggenhed mod hinanden som Figuren viser; ere nu Sidesladerne over CD og DG og over DB og DE i samme Maner, og disse forlanges, da vil Prismet over Grundsladen AHI være = Prismet over IHF (§. 132); borttages nu fra begge disse de ligestore Prismer over DBI og DIG samt over DCH og DEH , saa blive tilbage Parallelepipederne over Grundsladerne $ACDB$ og $DEFG$, der saaledes maae være ligestore. (Arithm. §. 38. 4). Have Sidesladerne i de givne Parallelepipeder ikke den her anførte Beliggenhed, da kan for de givne substituere andre Parallelepipeder, hvor Sidesladerne have den anførte Beliggenhed (§. 133) og Bevist dog blive gieldende; saaledes kunde i Stedet for Grundsladen $ACDB$ substituere Grundsl. $CKLD$.

Bevist 2. Være Grundsladerne i de givne Parallelepipeder vel ligestore, men ikke ligevinklede som $KCDL$ og $DEFG$ (Fig. XXX. a.), saa forvandles $KCDL$ til $ACDB$ (§. 36), som er ligevinklet med $DEFG$. Nu er Parallelepipedet over $KCDL$ ligestort med det over $ACDB$, naar de efter Betingelsen have samme Høide (§. 133), og Parallelepipedet over $ACDB$ = Parallelepipedet over $DEFG$, altsaa Parallelepipedet over $KCDL$ = Parallelepipedet over $DEFG$.

§. 135.

Læres. To Parallelepæda P og Π , der have forskjellig Længde, Brede og Høide (Fig. XXXIV. a-b.) forholde sig til hinanden som Producterne af deres Længde, Brede og Høide, eller ere i et sammensat Forhold af deres Længde, Brede og Høide.

Beviis. Da alle Parallelepæda kan forandres til retvinklede (§. 134), saa fører jeg allene Beviset for disse.

Man konstruerer et Parallelepiped p (Fig. XXXIV. c.), hvis Høide $KM = CD$, Brede $IK = AC$, Længde $KL = FG$, og et Parallelepiped π (Fig. XXXIV. d.) hvis Høide $OQ = KM = CD$, Brede $NO = EF$, Længde $OP = KL = FG$. Nu sammenlignes først P med p , og da Glæden $AD = LM$ (ved Construction), saa er $P:p = AB:KL$ (§. 132. Till.) Derpaa sammenlignes Parallelepipedet p med π , og da her (ligeledes ved Construction) $OQ = KM$ og $OP = KL$, saa er Glæden $KF = OS$. Antages nu disse for Grundflader, saa er $p:\pi = IK:NO = AC:EF$ (§. 132. Till.).

Fremdeles: Sammenlignes Parallelepipedet π med Π , i hvilke $OP = FG$, $NU = EF$ (ved Construction), altsaa Glæden $FN = OM$;
anta-

antages disse for Grundflader, saa have vi (§. 132 Till. $\pi : \Pi = OQ : FH = CD : FH$. Vi have altsaa følgende Proportioner :

$$P : p = AB : KL = AB : FG$$

$$p : \pi = KI : NO = AC : EF$$

$$\pi : \Pi = NR : FH = CD : FH$$

altsaa $P : \Pi = (AB \times AC \times CD) : FG \times EF \times FH$ (Arithm. §. 74. Till. 1) \therefore Parallelepipederne P og Π forholde sig til hinanden som Producterne af deres Længder, Breder og Høider.

Till. 1. Antages nu $AB = FG$, $AC = EF$, saa vilde (Arithm. §. 73. Anm.) $P : \Pi = CD : FH$ \therefore Parallelepipeda, hvis Længde og Brede ere ligestore, forholde sig som deres forskellige Høider (eller naar i to Parallelepipeder de to Dimensioner ere ligestore, forholde de sig som den tredje).

Till. 2. Antages $(AB \times AC) = (FG \times EF)$, saa er $P : \Pi = CD : FH$; eller antages $(AC \times CD) = (EF \times FH)$, saa er $P : \Pi = AB : FG$ \therefore naar Grundfladerne ere ligestore, forholde Parallelepipeder sig som deres forskellige Høider; ere derimod Høiderne ligestore, forholde Parallelepipederne sig som deres forskellige Grundflader; thi vi havde $P : \Pi = (AB \times AC \times CD) : (FG \times EF \times FH)$. Antages nu $CD = FH$,

$\equiv FH$, saa er $P : \Pi \equiv (AB \times AC) : (FG \times EF) \equiv AK : FN$.

Lill. 3. Antages i Parallelepipedet P , $AB \equiv AC \equiv CD$, og i Π ligeledes $FG \equiv FE \equiv FH$, og begge at være retvinklede, saa ere de Cuber eller Tærninger (§. 126 Lill. 4). Da vi have bevist, at $P : \Pi \equiv (AB \times AC \times CD) : (FG \times FE \times FH)$, saa er under dens Betingelse $P : \Pi \equiv AB^3 : FG^3 \equiv AC^3 : FE^3 \equiv CD^3 : FH^3$: forskillige Cuber eller Tærninger forholde sig til hinanden som Cubistallene af deres Sidelinier.

Lill. 4. Hvad i denne og foregaaende §. er lært om Parallelepipeda gielder om alle Arter af Prismet; thi et trefidet Prisme er Halvparten af et Parallelepipedum der har samme Høide (§. 131) og hvad der altsaa gielder om det Hele, gielder og om dets Halv. Men et mangesidet Prisme (Fig. XXXVII) kan, naar dets Grundflade $ABCDE$ ved Diagonaler inddeles i Triangler og over Diagonalerne tænkes tegnede Parallelogramer, deles i saamange trefidede Prismet som Grundfladen har Triangler: hvad der nu gielder om ethvert af disse Prismet især, gielder og om deres Summa, som er det mangesidede Prisme. Denne almindelige Sætning er saaledes bevist: at Prismet, der staae
over

toes ligestore Grundflader og høje ligestore Højder, ere ligestore.

§. 136.

Forkl. At udmaale en given Størrelse er egentlig at bestemme Forholdet imellem den og en vis antagen bekiendt Størrelse af samme Art, der kaldes Maal eller Maalestof (§. 93). Til Legemers eller legemlig Rums Udmaaling har man antaget Tærningen til Maal eller Maalestof: og at udmaale et Parallelepipedum, Prisme o. s. v. er ikke andet, end at bestemme, hvor ofte en antagen Tærning (der kaldes en Kubikfod, Kubiktomme, Kubikalen o. s. v., eftersom enhver af dens Sidelinier er en Fod, Tomme eller Allen) kan indeholdes eller omlægges deri; eller at finde Forholdet imellem den antagne Tærning og det givne Parallelepipedum.

§. 137.

Opgave. At beregne Indholden af, eller at udmaale et rekvinket Parallelepipedum Π (Fig. XXXIV. a).

Oplosn. Man maaler Grundfladens Længde EG , Brede EF og Parallelepipedets Høide, som er den lodrette Linie FH , med samme Længdemaal; de derved fundne Tal multipliceres med hinanden, og Produktet er et Tal, som viser hvor mange Gange

Gange den antagne Tærning, hvis Sidelinier bruges til at udmaale Længde, Brede og Høide, indeholdes i det givne Parallelepiped. Da Productet af Længde og Brede giver Grundfladens Indhold i Kvadratmaal (§. 96), saa kan Reglen for Beregningen ogsaa udtrykkes saaledes: man multiplicerer Grundfladens Kvadrat-Indhold med Parallelepipedets lodrette Høide.

Beviis. Maalestoffet være Tærningen KE (Fig. XXXI), hvis Side KN antages for Eenheden (Fod, Tomme, Alen), saa have vi følgende Proportion (§. 136):

Tærningen KE : Parallelep. $\Pi = KN \times NM \times ME : EF \times FG \times FH = 1 : EF \times FG \times FH$: Productet af Parallelepipedets Længde, Brede og Høide udtrykker, hvor ofte den antagne Tærning kan indeholdes eller omlægges i Parallelepipedet.

Underledes. Er Tærningens Sidelinie det antagne Længdemaal, saa maae der kunde paa Parallelepipedets Grundflade eller i et Lag sættes saa mange Tærninger som Productet af Linierne FG og EF angiver (§. 96); men af saadanne Lag maae der kunde være saa mange som Høiden FH indeholder Dele; multipliceres derfor det fundne Product (Antallet af Tærninger i et Lag) med Høiden (Antallet af Lag), saa udkommer Mængden af de Tær-

Tærninger, der opfylder det hele legemlige Rum af det givne Parallelepiped.

Lad f. Ex. Længden af Grundfladen FG være $= 7,6^1$, Bredden $EF = 4,31^1$, Høiden af Parallelepiped. $FH = 8,9^1$, saa er Indholdet $= 7,6^1 \times 4,31^1 \times 8,9^1 = 291,5284$ Kubiffod.

Till. 1. Var det givne Parallelepipedum en Kubus, og altsaa alle dens Sidelinier ligestore: $FG = FE = FH$, saa vilde, efter den anførte Oplosning, det Indhold være $= FG \times FG \times FG = FG^3$ d. e. Man finder paa Grund heraf den legemlige Indhold af en Tærning ved at maale een af dens Sidelinier og fubere det fundne Tal (Arithm. §. 52). Sættes til Ex. Sidelinien $= a$, saa er Indholden a^3 ; og da $\sqrt[3]{a^3} = a$, -saa findes Sidelinien til en Tærning ved at udtrække Kubikroden af den givne Indhold.

Anm. Dette er Anledning til Navnet Kubiktal, der altid udtrykker Indholdet af en Tærning, hvis Sidelinie er Tallets Kubikrod.

Till. 2. Bruges nu Decimal Inddeling (§. 93), saa sees let af det Anførte, at en Kubikrode bliver 1000 Kubiffod, en Kubiffod 1000 Kubiktommer o. s. v. Derimod efter Duodecimal Inddeling er en Kubiffod 1728 Kubiktommer, en Kubiktomme 1728 Kubiklinier.

Till.

Till. 3. Ved Kubikmaal har Decimal-Inddelingen samme Fordeel som ved Quadratmaal (§. 97. Till. 3); det større Maal forvandles til det næstfølgende mindre, blot ved at tilføje tre Nulletter, og det mindre til det næstforegaaende større ved at afklære fra højre Side tre Cifre, eller ved at multiplicere og dividere med 1000. Saaledes er $75^{\circ}394^{1}638^{11}526^{111} = 75.394638526^{111} = 75,394638526^{\circ}$. Bruges Duodecimal-Inddeling, maae man ved Forandring af større Maal til næste mindre multiplicere, og af mindre til næstforegaaende større dividere med 1728.

Till. 4. Sammenligning imellem Decimal- og Duodecimalmaal, samt det enes Forvandling til det andet, seer ganske efter §. 94; kun at, naar Foden antages uforandret, man sætter 1000 Sommer for 10 og 1728 for 12, saa at $1000y = 1728z$.

Till. 5. Til at reducere forskjellige Landes Kubikmaal tages Kubiktallene af de i Tabellen (§. 93) anførte Forholdstal, og Reductionen seer efter Arithm. §. 77. 3.

§. 138.

Opgave. At beregne Indholdet af ethvert Prisme.

Oplosn.

Oploesn. Man beregner Grundfladens Indhold (§. 98, 99 og 100) og multiplicerer den med Prismets Høide.

Bevis 1) Er Prismaet trefidigt, som *NO PRSQ* (Fig. XXXIV. d.), da er det Halvparten af Parallelepipedet *OT* (§. 131), som har samme Høide, men Grundfladen $OM = 2 \Delta NOP$. Parallelepipedets Indhold findes ved at multiplicere Grundfladen $2 \Delta NOP$ med Høiden *OQ*. Prismets altsaa, som er det Halve deraf, ved at multiplicere ΔNOP med samme Høide.

2) Er Prismaet mangefidigt, som *ABCDH* (Fig. XXXVII), kan det, ved at tænke sig Planerne *AH* og *BK* lagte igjennem Diagonalerne af dets Grundflader, inddeles i saamange trefidede Prismer som Grundfladen faaer Triangler; er altsaa tre. Ethvert af disse kan beregnes efter No. 1, og deres Summa er hele Prismets Indhold, der ogsaa findes med eet, naar hele Grundfladens Indhold i Kvadrataal multipliceres med Høiden.

Lill. 1. Ligesdanne Prismer ere de, hvis Grundflader ere ligedanne plane Figurer, og hvis Sidelinier have samme Høining mod Grundfladerne, og hvis Høider forholde sig som Grundfladernes eensliggende Sider; deres Indhold forholde sig derfor som Kubiktallene af deres Høider, eller to eensliggende Sider.

Lill.

Till. 2. Hæve to Prismer ulige Grundflader, som kunde være a, a og ulige Høider b, β , men dog ligestor Indhold, d. e. $ab = a\beta$, saa er $a : a : \beta : b$ d: deres Grundflader og Høider ere reciproque proportionale (Arithm. §. 71. Till. 2).

Till. 3. Sættes Indholdet af et vist Prisme $= A$, Grundfladen $= a$, Høiden $= b$, saa kan, naar af disse tre Stykker de to ere givne, det tredie findes, nemlig $A = ab$, $b = \frac{A}{a}$, $a = \frac{A}{b}$.

Exemp. En Mand indhøster 120 Traver Korn; hvert Neg optager tre Kubikfod Rum. Til at huse dette bygger han en Lade, som han gior 20 Fod bred, 12 Fod høi til Taget; fra Taget til Dyfningen er Høiden det Halve af Bygningens Brede. Hvor lang behøves nu Laden at være?

§. 139.

Læres. Ethvert Snit igiennem en Cylind. der $ABCD$ (Fig. XXXIX) med en plan LN , parallel med dens Grundflader frembringer en Cirkel LMN ligestor med Grundfladen, hvis Centrum K er i Cylindereens Arel FG .

Beviis. Enhver Sidelinie (Linie i Cylindereens Overflade), som AC , er parallel med Arlen FG

FG (§. 127); en Plan, lagt igiennem **ACGF**, vil skære de parallelle Planer af Snittet og Grundfladerne i de parallelle Linier **AF** og **LK**, der blive ligestore (§. 30). En anden Plan, lagt igiennem **EH** og **FG**, vil ligeledes skære Grundfladen og Snittet i de parallelle og ligestore Linier **EF** og **MK**. Saaledes er $AF = LK$, $EF = MK$, men $AF = EF$, folgelig $LK = MK$. Punkterne **L** og **M** ligge saaledes i Omfirdsen af en Cirkel, der har **K** til Middelpunkt.

Zill. Cylindere ere i sammensat Forhold af deres Grundflader og Høider: men ligedanne Cylindere (de, hvis Arel have samme Bøining mod Grundfladen) forholde sig som Kubiktallene af deres Høider eller Diameterne i deres Grundflader.

Da Grundfladerne forholde sig som Kvadraterne af Diameterne, saa vil Cylindernes indhold forholde sig som Kubiktallene af Diameterne.

§. 140.

Opgave. At beregne Indholdet af en Cylinder.

Oploen. Grundfladens Indhold beregnes i Kvadratmaal (§. 105) og multipliceres med Cylinderens Høide.

Beviis. Da Cylindren kan ansees som et uendelig mangesidet Prisme, saa indsees Oploeningens Rigtighed af det, der er sagt om Prismen §. 138.

Zill.

Till. 1. Sætte vi Grundfladens Diameter i en Cylinder $= d$, dens Høide a , saa findes Cy-
linderens Indhold $= \frac{ad^2}{4}\pi = ad^2 \times \frac{1}{4}\pi =$ (da
 $\frac{1}{2}d = r$) $ar^2\pi$ (§. 105).

Till. 2. Lænte vi os en større udvendig Cy-
linder, hvis Grundflades Radius var $= R$, og
en mindre indvendig, hvis Radius $= r$, og der
spørges om Indholdet af Røret eller det der bliver
tilbage naar den mindre Cylinder som et tomt Rum
borttages fra den større, saa er, naar Høiden an-
tages $= a$, det legemlige Indhold af Røret
 $= aR^2\pi - ar^2\pi = a(R^2 - r^2)\pi$.

Exemp. At udregne det legemlige Rum af et Bly-
rør som er 20 Fod langt, 8''' tyk i Metal, og hvis
Åbning er en Fod i Diameter. Her er $R = 6''$
 $8'''$ $r = 6''$, $a = 200''$; efter Formelen findes
Indholdet $= 200 (46,24 \square'' - 36 \square'') \times$
 $3,14159 = 6430,72$ Kubiktomme, omtrent 6,43
Kubikfod. Antages nu, efter hydrostatisk Forsøg,
Blye elleve Gange tungere end Vand, en Kubikfod,
efter dansk Maal og Vægt, altsaa at veie 11×62
Pund, saa kan, naar Prisen af et Pund Blye er
bekendt, Værdien af Røret herefter beregnes.

Till. 3. Sættes en Cylinders Indhold $\frac{ad^2}{4}\pi$
(Till.

(Till. 1) $\equiv A$, saa er $4A \equiv ad^2\pi$ og $\frac{4A}{d^2\pi} \equiv$

a , og $d \equiv \frac{4A}{a\pi}$. Man kan saaledes af en Cy-

linders Indhold og givne Diameter beregne dens Høide, og ligeledes af Indholdet og Høiden beregne dens Diameter.

Till. 4. Høiden af to Cylindere være a og a , deres Diameter d og d ; saa forholde Cylindernes sig som $ad^2 : ad^2$; ere nu Høiderne lige ($a \equiv a$), forholde de sig som $d^2 : d^2$; men er $d \equiv d$, er Forholdet som $a : a$.

Antager man nu en Cylinder k , hvis Høide er a og Diameter d , til Maalestof, saa at $ad^2 \equiv 1$; og i en anden Cylinder C , Høiden $a \equiv na$ og Diameterne $d \equiv md$, saa er Indholdet af den anden Cylinder $C \equiv nm^2 \times K$, thi $K : C \equiv ad^2 : ad^2 \equiv ad^2 : nam^2d^2 \equiv 1 : nm^2$; er altsaa $K : C \equiv 1 : nm^2$, saa er $C \equiv nm^2 \times K$. Sættes til Exempel $a \equiv 3a$ eller $n \equiv 3$, $d \equiv \sqrt{13} \times d$ eller $m \equiv \sqrt{13}$, og altsaa $m^2 \equiv 13$, saa er $C \equiv 3 \times 13K \equiv 39K$: Den til Maalestof antagne Cylinder K indeholdes i C saa ofte som Eenheden indeholdes i Produktet af C 's Høide og Kvadratet af dens Diameter.

§. 141.

Beskriv. En Rudestof (virgula pitho-
metrica seu cylindrica) er et Instrument til at ud-
maale Antallet af et vist Maal (Rander, Potter) af
flydende Legemer i cylindriske Kar. Rudekunst
(stereometria doliorum) er den Kunst, at kunde
ved Hielp af det nævnte Instrument bestemme An-
tallet af Rander, Potter af et flydende Legeme i
et Kar.

Anm. Rudekunst bruges ogsaa for Legemers Ud-
maaling i Almindelighed.

§. 142.

Opgave. At indrette og bruge en Rudestof.

Oplosn. Man lade sig forfærdige en mindre
Cylinder, der holder nøjagtig en Rande eller Pot;
en saadan være $ABCD$ (Fig. XLV). Dens Diame-
ter AB affættes paa Catheterne af en retvinklet
Triangel KEF , saa at $EF = EG = AB$; nu
affættes $EH = FG$, $EK = FH$ o. s. v., saa
er EG , EH og EK o. s. v. Diameteren til en
Cylinder, der med Høide AC holder 1, 2, 3 o. s. v.
Rander (§. 140. Till. 3, 4), da $EGq = FEq +$
 EGq , $FHq = FEq + EGq$ o. s. fr. Paa den
ene Side af en Stok, der har Form af et langt og
smalt Parallelepiped, affættes disse Linier EG ,
 EH ,

EH, *EK* o. s. v., da ved *G* sættes Tallet 1, ved *H* 2, ved *K* 3 o. s. v., paa den anden Side Maallet *AC*. Man maaler nu Diameteren af den Cylinder, hvis Indhold man vil vide, med Rudestoffet *EK*, og dens Høide med *AC*; Produktet af begge disse Tal angiver Mængden af Rander eller Potter (efterform *K* antages at holde en Rande eller et Pot,) som Cylindren indeholder, man vilde udmaale.

Anm. 1. De Kar, hvori flydende Legemer almindelig bevares, have sielden en fuldkommen cylindrisk Dannelse, men ere almindeligt mere ophæiede i Midten og smallere mod Enderne, saa at man maa gøre Forskiel paa Spunds diameteren og Endediameteren, og kan antage omtrent Indholden af Karret (Tønde, Ørehoved, Pibe o. s. v.) at være liig Indholden af en Cylinder, hvis Diameter er en Middelførrelse mellem Spunds- og Endediameteren, og hvis Længde den samme som Karrets. Begge disse Diametre maales derfor med den Side af Rudestoffet, hvorpaa *EG*, *EH* o. s. v. ere affatte, og af de fundne Tal tages Middeltallet.

Anm. 2. Til Brug ved Told- og Handelsfaget have vi meget gode og nøiagtige, ved Toldkammerets Foranstaltning beregnede og udgivne, Tabeller, hvorved Indholden ved Rudestoffet uden Beregning kan findes.

§. 143.

O p g a v e. At beregne Overfladen af et Prisme.

Opløs. Prismet være BD (Fig. XXIX), Sidesfladerne ere Parallelogramer, deres Glader indhold beregnes hver for sig efter §. 95, og sammenlagte udgiøre de Prismets Sidesflade; hertil lægges Grundfladerne, der beregnes efter §. 100. Alt sammenlagt udgiør det høje Prismets Overflade.

Fik. Er Prismet ret, da findes Quadrats indholdet af alle dets Sidesflader ved at multiplicere Perimeteren af Grundfladen med Prismets Høide; thi Prismets Høide kan ansees som Grundlinie i Rectanglerne, der ere Sidesflader, og Perimetrene af Grundfladerne som Summen af alle disse Rectanglers Høider.

§. 144.

Opgave. At beregne den krumme Overflade af en ret Cylinder.

Opløs. Da Cylinderen er at ansee som et uendelig mange-sidedt Prisme (§. 227), er dens Overflade en uendelig Række Rectangler, der samtede udgiøre en eneste Rectangel, hvis ene Side (Grundlinie) er Peripherien af Cylinderens Grundflade, og den anden Side (Høiden) er Cylinderens Axel; Overfladens Indhold findes altsaa ved at multiplicere Grundfladens Peripherie med Cylinderens Høide.

Fik.

Lill. Kalde vi som tilforn Cylinderens Diameter d og Høiden a , saa er dens krumme Overflade $\equiv ad\pi \equiv 2ar\pi$ (§. 104), følgelig ligestor med Fladen af en Cirkel, hvis Radius er en Mellemproportional-Linie imellem Cylinderens Høide og Diameter; thi antag Radius i saadan Cirkel $= e$, saa skal $e^2\pi \equiv 2ar\pi$, følgelig $e^2 \equiv 2ar$, og altsaa $a : e \equiv e : 2r$ og $a : e \equiv e : d$.

IV. Om Pyramider og Kegler og deres Udmaaling.

§. 145.

Læres. Skæres en Pyramide *aber* (Fig. XXXIII) forskiellige Steder med en Plan, der er lagt parallel med dens Grundflade, da blive de ved Snitten frembragte Flader fgh , *im* plane Figurer, der ere ligedanne med Grundfladen.

Beviis. I Fladen *arb* er Linien $fg \nparallel ab$, altsaa $ra : rf \equiv ab : fg$, i Fladen *arc* er $fh \nparallel ac$, altsaa $ra : rf \equiv ac : fh$ (§. 60), følgelig $ab : fg \equiv ac : fh$ eller $ab : ac \equiv fg : fh$. Paa samme Maade vides, at $bc : ac \equiv gh : fh$, og følgelig Δfgh (Snittet) $\sim \Delta abc$ (Grundfladen) (§. 69). For

ethvert andet parallel Snit som lmn føres Beviset paa samme Maade.

Lill. 1. Antages rq at være en lodret Linie paa Grundfladen abc og Vinklen $rqa = R$, da er den ogsaa lodret paa det parallelle Snit fgh og Vinklen $rzf = R$ (§. 120 Lill. 2); denne Linie rq er Pyramidens Høide, og rz , rv bestemme Snit-tenes Afstand fra Toppunktet, og vi have, naar vi betragte Triaklet arq , hvor $fz \perp aq$, $rq:rz = ra:rf = ab:fg$.

Lill. 2. $\triangle abc \sim \triangle fgh$, altsaa er $abc: fgh = ab^2:fg^2$ (§. 91), men $rq:rz = ab:fg$ (Lill. 1), altsaa $rq^2:rz^2 = ab^2:fg^2$ (Algebra §. 58. Lill. 2) og $\triangle abc:\triangle fgh = rq^2:rz^2$. Paa samme Maade vises, at $\triangle fgh:\triangle lmn = rz^2:rv^2$: Glade: Indholden af Pyramidens Grundflade og de forskjellige dermed parallelle Snitte forholde sig til hinanden som Kvadraterne af deres Afstand fra Pyramidens Top, eller ere i det dobbelte Forhold (ratione duplicata) af deres Afstand fra Toppunkter. (Algeb. §. 57. Lill. 1)./

§. 146.

Læres. Gøres igiennem to Pyramider $ABCDR$ og $abcr$ (Fig. XXXII og XXXIII), hvis Grundflader ere ligestore ($ABDC = abc$) og hvis Høider ere ligestore ($RE = rq$), paral-
tele

lele Snitte i samme Afstand fra Toppunkter ($RZ = rz$), da ere Fladerne af disse Snitte ligestore ($FGHI = fgh$).

Beviis. $ABCD : FGIH = RE^2 : Rz^2$,
 og $abc : fgh = rq^2 : rz^2$ (§. 144. Till. 2); efter
 Betingelsen er $RE = rq$, $RZ = rz$, altsaa
 $RE^2 = rq^2$, $RZ^2 = rz^2$, og folgelig $abc :$
 $fgh = ABCD : FGIH$; nu er $abc = ABCD$
 (efter Betingelsen), altsaa $fgh = FGIH$ (Arithm.
 §. 69, 70).

Till. Er saaledes alle i begge Pyramider i
 samme Afstand giorte Snit ligestore, saa er over-
 alt deres Udstrækning i Længde og Brede liges-
 stor; men da deres Høider ogsaa var antaget lige-
 stor, saa er deres Udstrækning baade i Henseende
 til Længde, Brede og Høide ligestor; men Le-
 gemer, der i Henseende til alle tre Dimensioner
 ere ligestore, opfylde ogsaa ligestore legemlige Rum
 3: ere selv ligestore. Og vi have saaledes udledt
 den vigtige Sætning: Pyramider paa ligestore
 Grundflader med lige Høider ere ligestore 3:
 indeslutte et ligestort legemligt Rum.

Anm. Samme Slutning kunde ogsaa udledes
 saaledes: Man tænke sig iglennem begge de paa lige-
 store Grundflader staaende Pyramider giorte lige-
 mange Snit i en uendelig liden Afstand fra hinan-
 den; derved vilde begge Pyramiderne blive udskaarne
 i ligemange uendelig smaae Pyramidestykker. Var

nu ethvert Par af disse ligestore, maatte Pyramiderne selv være ligestore; vi forudsatte, at deres Grundflader vare lige (§. 145), deres Høider ligeledes, og da et saadant Pyramidestykke imellem to i en uendelig liden Afstand lagte Planer kan antages lig et Prisme af samme Grundflade og Høide; men Prismen paa samme Grundflade og med samme Høide ere ligestore (§. 133) altsaa ere og Pyramidestykkerne ligestore; og da der af disse maatte i begge Pyramider, der antages at have samme Høide, være ligemange, ere Pyramiderne selv ligestore.

§. 147.

Læres. Enhver trespidet Pyramide er en tredie Deel af et trespidet Prisme *ABCDEF* (Fig. XXXVI), der har samme Grundflade og Høide som Pyramiden.

Bevis. Man trække i Sidesfladerne *AFEC*, *CEDB* og *AFDB* Diagonalerne *FC*, *CD* og *DA*. Nu er $\triangle AFD = \triangle ABD$ (§. 30. Till. 3). altsaa Pyramiderne *ABDC* og *ADFC*, der have deres fælles Toppunkt i *C*, ligestore (§. 145); men Pyramiden *ACDF* er den samme som *ADFC*, altsaa Pyramid. *ABDC* = Pyramid. *ACDF*.

Fremdeles er $\triangle AFC = \triangle FEC$, følgelig Pyramiderne *FECD* og *FACD*, der have deres fælles Toppunkt i *D*, ligestore (§. 145). Nu var Pyramiden *ACDF* = *ABDC*, altsaa og Pyramid. *FECD* = *ACDC*. Prismet indeholder
saa

saaledes det samme Rum som tre Pyramider der ere ligestore og betragtede fra forskjellige Synspunkter have samme Grundflader og Sider som Prismet; enhver Pyramide er folgelig en tredie Deel af et Prisme der har samme Grundflade og Side.

Ans. Ved virkelig at giennemskære et tredobelt Prisme, eller at sammensætte tre Pyramider af den ovenover forklarede Bessæenhed til et Prisme, gives denne Sætning mere indlysende.

Till. 1. Da et mangesidet Prisme (Fig. XXXVII) lader sig dele i saa mange trediede Prismer som der ere Triangler i Grundfladen, saa er ogsaa en mangesidet Pyramide Tredieparten af et mangesidet Prisme.

Till. 2. Forskiellige Pyramider ere i et sam-
mensat Forhold af deres Grundflader og Høider;
ere altsaa Høiderne lige, forholde Pyramiderne sig
som Grundfladerne, og ere Grundfladerne lige, som
Høiderne.

§. 148.

Bæres. Eihvert Enit igiennem en Regle ADB (Fig. XLI) med en Plan FPK , parallel med dens Grundflade AB , frembringer en Cirkel, hvis Centrum N ligger i Reglens Arel.

Beviis. Lad Fladen DCB skære de parallelle Plader af Snittet og Grundfladen i Linierne NK og CB , saa blive disse Snitte parallelle, og altsaa $DN : DC = NK$

$\equiv NK : CB$ (§. 60). Ligeledes staaes Snittet og Grundfladen af Planen DCL i Linierne NP og CL , og vi have $DN : DC \equiv NP : CL$; følgelig $NK : CB \equiv NP : CL$; men $CB \equiv CL$, altsaa og $NP \equiv NK$. Fladen FPK er saaledes en Cirkel, der har sit Centrum i N .

Till. 1. Grundfladen i Keglen ADB forholder sig altsaa til Fladen af Snittet FPK som $CB^2 : NK^2$ (§. 92. Till.) $\equiv DC^2 : DN^2 \equiv DI^2 : DG^2$ 3: Fladerne af de i en Kegel ved parallelle Planer gjorde forskellige Snitte forholde sig som Quadraterne af deres Afstand fra Toppunkter.

Till. 2. Da Keglen kan ansees for en uendelig mangeidet Pyramide, ligesom Cylinderen for et uendelig mangeidet Prisme, saa følger, at Keglen er Tredieparten af en Cylinder, der har samme Grundflade og Høide.

Till 3. Regler ere i et sammensat Forhold af deres Grundflader og Høider; antages en af disse Størrelser i to Regler ligestore forholde disse sig som den anden.

§. 149.

Opgave. At beregne Indholden af enhver Pyramide eller Kegel,

Oploesn. Man beregner Grundfladens Indhold og multiplicerer den med Tredieparten af Høiden.

Be.

Beviis. Prismets og Cylinderens Indhold er et Produkt af Grundflade og Høide (§. 138 og 140), Pyramiden og Keglen ere Tredieparten af et Prisme og Cylinder af samme Grundflade og Høide (§. 145), altsaa deres legemlige Indhold en Trediepart af Prismets eller Cylinderens Indhold; den findes folgelig ved at multiplicere Grundfladens Kvadrat-Indhold med en Trediedeel af Høiden.

Till. Er Grundfladen i en Pyramide eller Kegel b , dens Høide a , saa er $\frac{1}{3}ab$ Indholden af et Prisme eller Cylinder, der er det tredobbelte af Pyramiden eller Keglen, og altsaa Pyramidens eller Keglens Indhold $= \frac{1}{3}ab = b \times \frac{1}{3}a$.

§. 150.

Opgave. At beregne Indholdet af en ret affortet Kegel $ADHG$ (Fig. XL).

Oploesn. 1. Af den største og mindste Diameter AG , DH og Høiden CE i det affortede Kegelstykke, der antages at være givne, beregnes den Høide, Keglen vilde have om den var heel (her Linien CK) ved Hielp af denne Proportion $(AG - DH) : AG = CE : CK$ ∴ Differencen imellem begge Diametre forholder sig til den største, som Høiden af den affortede til Høiden af den hele Kegel.

Beviis. I Fladen af Trianglen AKC trækkes Linien DB parallel med KC , saa er $AB : AC = BD$

$\equiv BD:CK$ (§. 60), men $AB \equiv AC - DE$
 og $BD \equiv CE$, altsaa $(AC - DE) : AC \equiv$
 $CE : CK$ og $(2AC - 2DE) : 2AC \equiv CE :$
 CK , deraf $(AG - DH) : AG \equiv CE : CK$.

2) Af den fundne Høide CK og Grundfladen
 beregnes nu Indholden af den hele Regle AKG (§.
 147), dernæst Indholden af det borttagne Stykke,
 som er Reglen DKH (hvis Høide $KE \equiv KC -$
 EC); denne subtraheres fra den heles Indhold,
 og man har Indholdet af den affortede.

Ex. 1. Sættes $AC \equiv r$, $DE \equiv \rho$,
 $CE \equiv a$, og $CK \equiv x$, saa findes $x \equiv \frac{ar}{r - \rho}$

og $KE \equiv x - a \equiv \frac{ar}{r - \rho} - a \equiv$

$\frac{ar - ar + a\rho}{r - \rho} \equiv \frac{a\rho}{r - \rho}$, følgelig Indholdet af

Den affortede Regle $\equiv \frac{1}{3} \frac{ar}{r - \rho} \times r^2 \pi - \frac{1}{3} \frac{a\rho}{r - \rho}$

$\times \rho^2 \pi \equiv \frac{r^3 - \rho^3}{r - \rho} \times \frac{1}{3} a \pi$. Da fremdeles

$\frac{r^3 - \rho^3}{r - \rho} \equiv r^2 + r\rho + \rho^2 \equiv (r + \rho)^2 - r\rho$,

saa er den affortede Regels Indhold $\equiv ((r + \rho)^2 -$
 $r\rho) \frac{1}{3} a \pi$.

Anm. Mange Huusholdnings-Kar og Maal have
 Form af affortede Regler og maae beregnes saaledes.
 Nogetlunde rette Træstammer beregnes ogsaa nøiagtigst,

tiøst, naar de ansees for affortede Regler, da de blive smallere opad. Lad til Ex. den underste Diameter eller Giennemsnittet i en saadan Stamme fornedes være 20'', foroven eller den mindste Diameter 16'', Længden 36', saa findes Indholden efter den anførte Form $= (18^2 - 80) \times 120 \times 3,14 = 91939,20$ Kubiktoommer $= 91,9392$ Kubikfodder.

Till. 2. En affortet Pyramide kan ansees som en affortet Kegel af samme Høide og ligesaa for Grundflade. Man beregner derfor Grundfladens og Overfladens Indhold i Kvadratmaal, og søger Radius til Cirkler af samme Flade Indhold r og ρ (§. 105 Till. 3); da Indholden beregnes efter samme Form som er fundet for den affortede Kegel.

§. 151.

Opgave. At beregne Overfladen af en Pyramide.

Oplosn. Sidesfladerne, der alle ere Triangler, beregnes efter §. 98; Grundfladen, der altid er en retlinet Figur, beregnes ligeledes efter den plane Geometrie: disse sammenlagte give hele Pyramidens Overflade.

Till. 1. Er Pyramiden saaledes, at alle de lodrette Linier i enhver af dens Sidesflader ere lige lange, da er Summen af alle Sidesfladerne et Produkt af Grundfladens Perimeter og det Halve af en af disse lodrette Linier. I en affortet Pyramide ere Sidesfladerne Trapezier, og beregnes efter §. 99.

Till.

Zill. 2. Da en Kegel er en uendelig mangesidet Pyramide, dens Sideslade altsaa en Samling af uendelig mange smaae Triangler, hvis Høide er Keglen's Sidelinie, saa er Keglen's hele Sideslade ligestor med en Triangel, hvis Grundlinie er Peripherien af Grundsladen *ABG* (Fig. XL), og hvis Høide er Sidelinien *AK*; den beregnes altsaa efter §. 98 og 105. Grundsladen er en Cirkel, og beregnes efter §. 105. Disse sammenlagte give Keglen's hele Overflade.

Zill. 3. Sidesladerne af en affortet Pyramide ere Trapezier, og beregnes efter §. 99.

Zill. 4. Kalde vi Sidelinien i Keglen *l*, Radius i Grundsladen *r*, saa er den frumme Sideslade $= 2r\pi \times \frac{1}{2}l = lr\pi$. Tænk vi os nu en Cirkelslade, hvis Radius er *ρ* og hvis Overflade $\rho^2\pi = lr\pi$, saa er $\rho^2 = lr$ og $l : \rho = \rho : r$. D. e. Keglen's frumme Sideslade er ligestor med Sladen af en Cirkel, hvis Radius er en Mellemproportional Linie imellem Keglen's Sidelinie og Grundsladens Radius.

Zill. 5. Sidesladen af en affortet ret Kegel *ADHG* (Fig. XL) er et Produkt af *EC* og Peripherien af et igiennem Midten af *EC* parallel med Grundsladen gjort Snit (§. 63 og 99).

V. Om Kuglen og dens Udmaalning.

§. 113.

Læres. Skiares en Kugle med en Plan, bliver Gienemsnittet altid en Cirkel, hvis Centrum falder i en lodret Linie sældet fra Kuglens Centrum paa den skiaerende Plan.

Beviis. Paa den skiaerende Glade IK (Fig. XLIII) sældest en lodret Linie CG fra Kuglens Centrum, og fra G i den skiaerende Glade forskellige rette Linier GE, CB, GD . Da CG er lodret paa Planen IK , saa er Vinklen $CGD = CGB = CGK = R$; trækkes nu Linierne CB og CD , saa er $CD^2 = CG^2 + GD^2$ og $CB^2 = CG^2 + GB^2$ (§. 37), men $CD = CB$, da de ere Radier i Kuglen, følgelig $CD^2 = CB^2$ og CG er den samme, altsaa $CD^2 - CG^2 = CB^2 - CG^2$; $\therefore GD^2 = GB^2$ og $GD = GB$. Paa samme Maade vises, at alle de rette Linier fra G til Kuglens frumme Overflade er ligelange, og altsaa at Gladen $IDKB$ er en Cirkel og G dens Centrum.

Till. 1. Antages Snittet at gaae igiennem Kuglens Centrum, som LCM , da ere alle Linier i dets Glade, der trækkes fra C til Omkredsen, som CL, CM , tillige Radier i Kuglen, og følgelig lige store. Snitte igiennem Kuglens Middelpunkt frem-

frembringe derfor Cirkler, hvis Radier ere Kuglens Radier; de ere derfor alle ligestore og faae Navn af Stor-Cirkler.

Zill. 2. Ethvert Snit, som ikke gaaer igiennem Kuglens Centrum, frembringer en mindre Cirkel, der er desmindre jo længere den er borte fra Centrum; saaledes er Cirklen *IK* (Fig. XLIII) mindre end *QN*, thi $CB^2 = CG^2 + GB^2$ og $CN^2 = CI^2 + IN^2$. Nu er $CB^2 = CN^2$ (da *CB* og *CN* er Radier i Kuglen), altsaa $CI^2 + IN^2 = CG^2 + GB^2$, men $CI^2 < CG^2$ efter Betingelsen, og følgelig $IN^2 > GB^2$ (Arithm. §. 38), og $IN > GB$, følgelig Snittet *OIN* større end *IGK*.

Zill. 3. Gøres flere Snitte i en Kugle parallelle med hinanden, som *IK*, *ON*, *LM* (Fig. XLIII), da falde deres Centra *G*, *I*, *C*, *F* i samme rette Linie *AD*. Endepunkterne af denne Linie *A* og *D*, der staae ligelangt borte fra Stor-Cirklen *LM*, faldes Poler saavel til den som til de mindre Cirkler, og Linien *AD* Axlen.

§. 153.

Løres. Dægges igiennem Polerne *A* og *B* til flere parallelle Cirkler *KL*, *FG*, *HI* (Fig. XLIV) to eller flere Cirkler *AMDB*, *AHEB* og *ALGIB*,
 saa

faa ere de Buer af Parallel-Cirklerne som ligge mellem to af disse ligedanne.

Bevlis. Den rette Linie AB er Stor-Cirklerne's Giennemsnits-Linie og Aksen for Parallel-Cirklerne; trækkes nu i Gladen AEB Linierne IH og CE og i Gladen ADB Linierne IM og CD , saa ere disse lodrette paa AB , og folgelig parallelle. Af samme Grund er ogsaa i Gladen AGB Linierne IL og CG parallelle, folgelig ere Vinklerne LIH og GCE ligestore og Buerne HL og EG ligedanne; ligeledes er Vinklerne HIM og ECD ligestore og Buerne HM og ED ligedanne.

Andetledes. Da AB er lodret paa alle disse Linier, saa er enhver af de nævnte Vinkler, Bøining's-Vinkler for begge Planer, og altsaa ligestore.

Lill. 1. Ere AG og AE Quadranter, saa er $FODG$ en Stor-Cirkel, der staaer lodret paa begge Quadranterne og gaaer igiennem begges Poler, ligesom og begge Quadranterne gaae igiennem dens Poler.

Lill. 2. Begge Cirklerne, AGB og AEB , Bøining mod hinanden, eller den Vinkel de gaae med hinanden, bestemmes i Grader ved Buerne HL og EG .

Læres. En Kugles Jærbold (legemlige Rum) er to Trediedele af en Cylinder, der har til Grundflade Kuglens Stor-Cirkel og til Høide Kuglens Diameter (en omskreven Cylinder.)

Beviis. Forestiller man sig en Kvadrant ABC (Fig. XLII) at dreie sig om AB saalænge til den falder i den Plan, hvorpaa den fra Begyndelsen stod lodret; en Kvadrat DQ at dreie sig paa samme Maade om $DE = AB$, og en retvinklet Triangel FGT om $FG = DE = AB$, saa vil Kvadranten danne en Fierbedeel af en Halvkugle, hvis Radius er $AB = DE = FG$; Kvadraten Fierbedelen af en Cylinder, der har til Radius i sin Grundflade og til Høide den samme Linie AB eller Kuglens Radius, og Trianglen Fierdelen af en Kugle der har samme Høide og Grundflade med samme Radius. Staa nu disse tre Legemer over samme Flade AB og man gennemskærer dem med en Plan parallel med AB , saa ere alle Snittene LIK , MNO , TVX Kvadranter (§. 139, 152), og følgelig ligedanne Figurer (§, 92 Till. 2), hvis Flader forholde sig som Kvadraterne af deres Radier LK , MO , VX . Tænkér man sig nu over samme Flade AB en Kvadrat ac , hvis Sidelinie ab antages

$= AB$

$\equiv AB$ og i den en Quadrant $alhc$, og, ved at trække Diagonalen bt , den retvinklede Triangel abt . Saa vil, naar den med AB parallelle Plan ogsaa gaaer her igiennem, yk være $\equiv LK$, $yo \equiv MO$, $yx \equiv TX$. Men $bh^2 \equiv yk^2 + yb^2$ (§. 37), og da $bh \equiv bc \equiv yo$, saa er $bh^2 \equiv yo^2$. Fremdeles er $ba : at \equiv by : yx$ (§. 60), men $ba \equiv at$ (efter Betingelse), altsaa $by \equiv yx$ og $by^2 \equiv yx^2$. Indsættes disse Værdier for bh^2 og by^2 i den første Equation, saa faae vi $yo \equiv yk^2 + yx^2$. Efter Construction er $yo \equiv MO$, $yk \equiv LK$ og $yx \equiv TX$, altsaa er $MO^2 \equiv LK^2 + TX^2$ og $MO^2 - TX^2 \equiv LK^2$. Deraf end videre $\frac{1}{4}MO^2\pi - \frac{1}{4}TX^2\pi \equiv \frac{1}{4}LK^2\pi$, det er Quadranten MNO — Quadr. $TVX \equiv$ Quadr. LIK . Da dette kan paa samme Maade bevisees hvor endog den skærende Plan tænkes lagt i disse tre Legemer, saa følger, efter hvad der er sagt om Prismes (§. 133. Till. 1) og om Pyramider og Regler (§. 146), at Fierdedelen af Cylinderen DQ — Fierdedelen af Reglen FTG er \equiv Fierdedelen af Halvfuglen ABC . Kalde vi for Kortheds Skjold Fierdedelen af denne omkrøbne Cylinder $\frac{1}{4}C$, af Halvfuglen $\frac{1}{4}K$ og af Reglen $\frac{1}{4}H$, saa have vi $\frac{1}{4}C - \frac{1}{4}H \equiv \frac{1}{4}K$, og heraf $C - H \equiv K$; \therefore Cylinderen er, naar

Reglen er frædraget, ligesom med den halve Kugle. Men Reglen er $\frac{1}{3}$ af en Cylinders der staar over samme Grundflade og Høide, altsaa $H = \frac{1}{3}C$, men $C - H = K$, altsaa $C - \frac{1}{3}C = K$ og $K = \frac{2}{3}C$; ∴ den halve Kugle er ligesom i Indhold med to Trediedele af en Cylinders der har til Grundflade Kuglens Stor-Cirkel og til Høide Kuglens Radius. Paa samme Maade kan Bessert føres for den anden halve Kugle og en ligedan Cylin-
 der; folgelig er en heel Kugle $= \frac{2}{3}$ af en Cylin-
 der der har til Grundflade Kuglens Stor-Cirkel og til Høide Kuglens Diameter.

Lill. Kuglen er altsaa det dobbelte af en Kugle der har til Grundflade dens Stor-Cirkel og til Høide dens Diameter. Forholdet imellem en Kugle, en Kugle og en Cylinders af den anførte Bessaffenhed er altsaa som imellem Tallene 1, 2, 3.

§. 155.

Opgave. At beregne Indholdet eller Rummet af en Kugle, hvis Diameter er givet.

Oploen. Man beregner Kuglens Stor-Cirkel (§. 105), denne multipliceres med Diameteren, og af dette Product tages de to Trediedele; (§. 140 og 145) eller Storcircelns Flade Indhold multipliceres med to Trediedele af Diameteren.

Lill.

Lill. 1. Kalde vi Kuglens Diameter d , saa er Stor-Cirkelens Flade $= \frac{1}{4}d^2\pi$ (§. 105. Lill. 1) og naar denne multipl. med 2 er Cylindrets Indhold $= \frac{1}{2}d^3\pi$ men Kuglens Indhold bliver to Trediedele deraf altsaa $= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}d^3\pi = \frac{1}{3}d^3\pi = \frac{1}{6}d^3\pi$. Kuglens Indhold findes saaledes ved at multiplicere en Fjerde Deel af Diameterens Kubus med π eller Diameterens Kubus med $\frac{1}{6}\pi$. Dette sidste Udtryk vilde i Praxis være det bequemste, da $\frac{1}{6}\pi$ er et uforanderligt Tal, der reengang for alle Tinde bestemmes, og er efter det Euclidiske Forhold 0,52359.

• Lad til Ex. en Kugles Diameter være $= 8''$, dens Indhold er da $\frac{1}{6} \times 8^3 \times \pi = 85\frac{1}{3} \times 3,14159 = 268,08235$ Kubiktommer. Eller $8^3 \times \frac{1}{6}\pi = 512 \times 0,52359 = 268,08238$ Kubiktommer.

Lill. 2. Kalde vi Kuglens Indhold A og som for dens Diameter d , saa have vi $A =$

$$\frac{1}{6}d^3\pi; \text{ deraf } d^3 = \frac{6A}{\pi} \text{ og } d = \sqrt[3]{\frac{6A}{\pi}}.$$

Saa efter denne Form, naar Kuglens Indhold er givet, finde dens Diameter.

Lill. 3. Tænke vi os en Kugle A , hvis Diameter er d , saa er $A = \frac{1}{6}d^3\pi$, og en anden Kugle B , hvis Diameter er d' , saa er dens Ind-

hold $\frac{1}{6}d^3\pi$; følgende $A : B = \frac{1}{6}d^3\pi : \frac{1}{6}d^3\pi$ og
 $A : B = d^3 : d^3$ (Arithm. §. 73. Anm.); d. e.
 Forstiklige Kuglens Indhold forholder sig som Ku-
 berne af deres forstiklige Diametre.

§. 156.

Opgave. At beregne en Kugles frumme
 Overflade, naar dens Radius eller Dames-
 ter er givet.

Opløs. Af den givne Radius CD (Fig.
 XLIII. Tab. VI) beregnes Overfladen af Kuglens
 Største Cirkel $= CD^2 \times \pi$; denne fire Gange ta-
 get udgør Kuglens Overflade $= 4 \times CD^2 \times \pi$.

Bevist. Antages den rette Vinkel BCD
 at dreie sig om den ubevægelige lodrette Linie CB ,
 da vil Quadranten BND beskrive den halve Kug-
 les Overflade og enhver liden Bue af Quadranten
 KL beskrive et Stykke af den frumme Glade;
 igiennem Middepunktet af denne Bue N og dens
 Endepunkter K og L trække man Linierne NG
 LH og KF parallelle med DC , da de ogsaa blive
 lodrette paa CB . Lægges nu igiennem N en Tan-
 gent LK , som forlænget vilde skære den ogsaa for-
 længede Linie CB i Q , saa vil LQ være Sides-
 linien, QH Aksen, og LH Grundfladens Ra-
 dius i en lodret Regle; og KL vil ved Omdrei-
 ning

ning beskrive et Stykke af denne Kegles Overflade, hvis Kvadrat-Indhold (§. 151. Till. 5) findes ved at multiplicere Peripherien af et Snit, gjort igjennem Midten af KL parallel med LH , med KL , og altsaa her $= 2NG \times \pi \times KL$. Tænte vi os nu Tangenten KL overmaade liden, da er der ingen Forskiel imellem den og Buen KL , altsaa vil det lille Stykke af Kuglens Overflade, som Buen vil beskrive, ikke være mærkeligt forskjellig fra det Stykke af Keglesladden som Tangenten beskriver, og saaledes dette lille Stykke af Kuglesladden ogsaa være $= 2NG \times \pi \times KL$ eller $2\pi \times NG \times KL$.

Man trækker nu Linien CN , som er lodret paa Tangenten (§. 46) LK , og sælger fra K paa LH den lodrette Linie KM , som skærer NG i V og er parallel og ligestor med FH . Efter det Anførte er Vinklen $MNK = R$ og NV lodret paa KM , altsaa $KL : KH = CN : NG$ (§. 68 og 71) og $NG \times KL = KM \times CN$ (Arithm. §. 71) $= CB \times FH$. Det lille Stykke Kugleslade, som beskrives af Buen KL , var $= 2\pi \times NP \times KL$, men $NP \times KL = BC \times FH$, altsaa det nævnte Stykke af Kuglens Overflade $= 2\pi \times BC \times FH$, hvor CB er Kuglens Radius og FH en overmaade liden Deel deraf. Forestil-

ler

Ier man sig nu Radius CB deelt i latter saadanne
 smaa Dele, hvortil høre ligesaa mange smaa
 Buer, saa er ethvert Stykke af Kuglefladen et
 Produkt, hvis ene Faktor er Størrelsen $2\pi \times$
 CB og den anden en saadan liden Deel af Ra-
 dius som PH , selig den halve Kugleflade et
 Product af $2\pi \times CB$ og Summen af alle disse
 smaa Dele; men Summen af alle disse smaa
 Dele udgør Radius CB , og saaledes er den halve
 Kugleflade $\equiv 2\pi \times CB^2$ og den hele Kugle-
 flade altsaa $\equiv 4\pi \times CB^2$; men en Stor Cirk-
 els Overflade $\equiv \pi \times CB^2$, altsaa en Kugles
 Overflade ligesom med Fladerne af fire Stor Cirk-
 ler i samme Kugle.

Lest. Tænk vi os en Kvadrat $DABC$, som
 dreier sig om CB , saa beskriver AD Overfladen
 af en omskrevet Cylinder (§. 154), hvis Overflade
 er, naar dens Høide er CB , $\equiv 2\pi \times CB^2$
 (§. 144), og sættes Høiden $\equiv 2CB$, bliver Fla-
 den $\equiv 4\pi \times CB^2$, og seligelig ligesom med
 Kuglens Overflade.

§. 157.

Opgave. At beregne Kuglens Indhold, naar
 dens Overflade og Radius ere givne

Opløs.

Opførsel. Man multiplicerer den givne Overflade med en Trediedeel af Radius, saa har man Kuglens legemlige Indhold i Kubikmaal.

Betragtning. Læser man sig paa en Kugle en stor Cirkel og en af dens Quadranter ved at halveres deels i mange smaa Dele, og igiennem Stor-Cirkelns Poler og disse Punkter andre Cirkler (hvoraf Stykkerne fra Polen til Stor-Cirklen ogsaa vil blive Quadranter) lagte, hvorpaa de samme Dele afstøttes; imellem disse Punkter trækkes rette Linier eller Chorder, og derpaa rette Linier trækkes fra Kuglens Center til ethvert af Delingspunkterne, saa opkomme Pyramider, hvis Toppunkt er i Kuglens Center og hvis Grundflader ere de imellem Korderne til de smaa Buer paa Stor-Cirklerne indskattede Flader. Gientager man dette ved de øvrige Quadranter i denne og den anden Halvkugle, saa er i Kuglen beskrevet et Polyeder, der er sammensat af luttet Pyramider, hvis Grundflader udgjøre Polyhedrets Overflade, og hvis Toppunkt er Kuglens Centrum. Fortsættes Halveringen af Buerne i det Uendelige, da falde Korder og Buer sammen, og Pyramidernes Grundflader blive Stykker af Kuglefladen og dorets Hele Kuglens Radius. Den hele Kugle bestaaer altsaa af mange Pyramider, hvis Grundflader udgjøre

glare Kuglens Overflade og høis Hoide er Kuglens Radius; men Indholdet af en Pyramide findes ved at multiplicere Grundfladen med en Trediedeel af Høiden (§. 149); altsaa Kuglens Indhold ved at multiplicere dens Overflade med en Trediedeel af dens Radius eller med en Siette-
 deel af dens Diameter. Kalde vi Indholden A , Overfladen S , og Diameteren d , saa er $A = \frac{1}{6}dS$.

Ex. 1. Vi fandt (§. 155) Kuglens Indhold A af dens Diameter d at være $= \frac{1}{6}d^3\pi$; sammenligne vi dette Udtryk for Kuglens Indhold med det i denne § oven fundne $\frac{1}{6}dS$ (hvor S betyder den krumme Overflade), saa faae vi denne Ligning: $\frac{1}{6}dS = \frac{1}{6}d^3\pi$, og deraf $dS = d^3\pi$ og $S = d^2\pi$; d. Kuglens krumme Overflade findes ved at multiplicere Diametens Kvadrat med π ; men en Stor-Cirkels Overflade er $= \frac{1}{4}d^2\pi$ og $d^2\pi = 4 \times \frac{1}{4}d^2\pi$, altsaa enhver Kugles Overflade ligger for med fire Flader af Stor-Cirkler t samme.

Anm. Man kan saaledes finde Kuglens Indhold ved først at beregne Kvadratinholdet af dens Overflade, og omvendt finde Overfladen ved først at beregne Indholden. Jeg har fremsat begge Demonstrationer, skøndt jeg ikke holder det for nødvendigt at forklare dem begge for Begyndere, men overlader det til Læreren at vælge, hvilken han troer den fatteligste.

Ex.

Till. 3. Indholdet af ethvert Kuglestykke (Kuglesegment), som det der dannes ved Omdrejning af Figuren *jakv* (Fig. XLII), findes ved at beregne Indholdet af en Cylinder der har til Grundflade Kuglens Stor-Cirkel og til Høide *av*, og derved fra subtrahere Indholdet af den afforte Kugle imellem *as* og *vs*. Ligeledes er det Stykke af Kuglefladen, der dannes af Buen *al*, saa stort som Overfladen af en Cylinder, hvis Høide er Kuglestykkets *av* og hvis Grundflade er Kuglens Stor-Cirkel. Herpaa grundes den almindelige Sætning: Tænker man sig en om en Kugle omskrevet Cylinder, og igltennem begge gøres flere Snitte parallelle med Cylinderens Grundflade, da vil de imellem to saadanne parallelle Snit liggende Dete af Kuglefladen (Belter v. Zoner) være ligestore med den frumme Overflade af det imellem samme Planer liggende Stykke af den omskrevne Cylinder. Ligeledes indsees let, at et Kugle-Udsnit (Kuglesector) er $\frac{2}{3}$ af en Cylinder, hvis Grundflade er Kuglens Stor-Cirkel og Høiden det til Udsnittet hørende Affsnits-Høide.

Anm. Disse ere de Regler, efter hvilke Legemer, hvis Dannelse kan forklares af den elementære Geometrie, kan udmaales og beregnes. Egentlige regulaire (regelmæssige) Legemer ere saadanne, hvis

hvis Hjørner (sølvde Vinkler) ere ligestore (3: dannes af ligemange ligestore plane Vinkler) og hvis Sidesflader ere ligestore regulære plane Figurer. Man indseer let, at de flade Vinkler, som danne et Hjørne, maae tilsammen udgjøre en mindre Sum end 360° , da de ellers vilde falde i een Plan og intet Hjørne danne. Af denne Forklaring seer, at kun fem regulære Legemer ere mulige, nemlig:

- 1) Tetraeder (tetraedron), regulær fire-sidede Legeme, hvor Sidesfladerne ere ligesidede Triangler og ethvert Hjørne dannes af tre Vinkler, der hver er 60° , deres Sum altsaa 180° .
- 2) Octaeder (octaedron), regulær Ottetang, hvis Sidesflader ere ligesidede Triangler og hvis Hjørner dannes af fire Vinkler, hver 60° , deres Sum altsaa 240° .
- 3) Icosaeder (icosaedron), regulær Tyvekant, hvis Sidesflader ogsaa ere ligesidede Triangler og fem Vinkler paa 60° danne ethvert Hjørne; deres Sum er altsaa 300° .

Af Triangler kan ingen flere regulære Legemer dannes, da sex Vinkler, hver paa 60° , vilde udgjøre 360° , og altsaa ingen Hjørne danne.

- 4) Terningen (Cubus, Hexaeder) regulær Sekskant, hvor Sidesfladerne ere Kvadrater og hver Hjørne dannes af tre rette Vinkler, hvis Sum er 270° ,

5) Do-

5) **Dodecaeder** (dodecaedron), regulair Totu-
kant, hvis Sidesflader ere regulaire Femkan-
ter, og enhver solid Vinkel dannes af tre
Vinkler, hver paa 108° , deres Sum altsaa
 324° .

Ann. 2. Meget irregulair Legemers Indhold
findes ved følgende Kunstgreb: Man lægger dem i
et Kar af en saadan Dannelse, at dets Indhold
næagtig kan beregnes, fylder Karret derpaa enten
med Vand eller tør Sand. Tager man nu Lege-
met op, vst Vandet eller Sandet synke, og det
Rum, det nu optager mindre end før og som teg
kan beregnes, er det irregulair Legemes Indhold.
I Hydrostatiken læres, hvortledes man af Legemer-
nes specifikke Vægt kan finde deres geometriske Ind-
hold eller legemlige Rum.

§. 158.

Forklær. At kubere et geometrisk Legeme
er at forvandle det til en Tærning (Kubus), eller
at finde Sidelinien til en Kubus, der har samme
legemlige Indhold som det givne Legeme. Findes
denne Linie ved Construction, kaldes det geome-
trisk Kubatur; derimod er det arithmetisk, naar
man finder denne Sidelinie ved Beregning. At
forvandle en Figur til en anden, er ved Construc-
tion eller Regning af den givnes Dimensioner at
bestem

bestemme den søgte, hvor kun den ene eller anden Dimension er givet.

§. 159.

Opgave. At finde Siden til en Tærning, som indeholder en anden given Tærning et vist Antal (n) Gange.

Opløs. Lad Siden i den givne Tærning være a , saa er Indholden a^3 , den søgte Indhold altsaa na^3 og dens Sidelinie $l = \sqrt[3]{na^3} = a\sqrt[3]{n}$. Er nu $n = 2$, saa er Siden til den dobbelt saa store Tærning $l = a\sqrt[3]{2}$; er $n = 3$, saa er $l = a\sqrt[3]{3}$ o. s. v.

Lill. 1. Da forskellige Kugler forholde sig som Kuberne af deres Diametre (§. 155. Lill. 3), saa er ogsaa, naar en Kugles Diameter er $= d$, Diameteren af en n Gange saa stor Kugle $D = d\sqrt[3]{n}$. Dette anvendes i Artilleriet til at forfærdige Caliberstokke.

Lill. 2. Man seer let af denne ene Opgave, hvorledes ethvert Legeme ved Regning kan faabes. Er f. Ex. Diameteren i en Kugle d , saa er dens Indhold $\frac{d^3\pi}{6}$ (§. 155) og Side-

$$\text{linien i en ligesaa stor Tærning} = \sqrt[3]{\frac{d^2\pi}{6}} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$$

§. 160.

Opgave. At forvandle en Kugle, hvis Dimensioner ere bekiendte, til en Cylinder, hvis Høide er bestemt.

Oploasn. Lad Høiden af Kuglen være a , dens Grundflades Diameter d ; og Cylinderens givne Høide a , dens Grundflades søgte Diameter x . Kuglens Indhold er da $= \frac{1}{4}d^2\pi \times \frac{1}{3}a = \frac{1}{12}d^2a\pi$ (§. 149), den søgte Cylinders Indhold $= \frac{1}{4}x^2a\pi$ (§. 140); da Indholdet af begge skal være lige, saa er $\frac{1}{4}x^2a\pi = \frac{1}{12}d^2a\pi$. Af denne Equation søges Værdien for x , og vi faae $x^2a = \frac{1}{3}d^2a$ og $x^2 = \frac{d^2a}{3a}$, folgelig x , den søgte Diameter i Cylinderens Grundflade) $= d\sqrt{\frac{3a}{a}}$ (Algebra §. 39).

Till. 1. Paa samme Maade kan en given Cylinder forvandles til en Kugle af lige Indhold. Kalde vi Cylinderens Høide a , dens Diameter d , og Kuglens søgte Diameter x , saa er Cylinderens

Inde

Indhold $\frac{1}{4}d^2a\pi$ (§. 140) og Kuglens Indhold
 $= \frac{1}{6}x^3\pi$ (§. 154), altsaa $\frac{1}{6}x^3\pi = \frac{1}{4}d^2a\pi$,
 $x^3\pi = \frac{3}{2}d^2a\pi$, $x^3 = \frac{3}{2}d^2a$, og $x = \sqrt[3]{\frac{3d^2a}{2}}$.

Lill. 2. Efter samme Fremgangsmaade kan
 enhver af disse Figurer forvandles til et Prisme
 eller Pyramide, og omvendt.



Plan Trigonometrie.

[illegible]

I n d l e d n i n g.

§. 1.

Geometrien har lært os, hvorledes man af tre givne eller bekiendte Stykker i en Triangel, hvorefter af det eene dog maae være een Side, kan ved Tegning, efter en formindstet Maalestok, frembringe den hele Triangel, da de øvrige Stykker bestemme sig selv; Vinklerne blive nemlig ligesaa store som de ere i den virkelige Triangel, og Linierne blive efter den antagne formindskede Maalestok hvad de ere i det større Maal. Men ere i en saadan Triangel en Linie eller Vinkel overmaade liden i Sammenligning med de øvrige, da er denne Tegning i høi Grad underkastet Feil. Til Ex. forestille man sig en Triangel, hvis ene Side er Jordkuglens Radius, og de to andre Sider Linier, der, trukne fra denne Radius's Endepunkter, skulde løbe sammen i Solens Centrum. Endog med den allermindste Maalestok og med den allerførste Opsigtighed vilde det være umueligt at tegne den saaledes,

at man kunde, endog kun med nogenlunde Visshed, bestemme Skæringspunktet af de næsten parallel med hinanden løbende Linier. Dette var rimeligt den første Anledning for Mathematikerne, da de vilde vove dem til at udmaale hele Verdensbygning, at opfinde en Videnskab, hvorved man, naar de tre Ting, der bestemme en Triangel, nøiagtigen vare udmaalte, blev i Stand til ved sikker Regning med en tilstrækkelig Nøiagtighed at kunde finde de øvrige Stykker endog uden Tegning. Denne Videnskab kaldte man Trigonometrie (Prolegom. §. 4).

Anm. Ligesom Geometrie vel egentlig først er bleven til for Landmaalings Skuld, men siden har vist en langt mere udbredt Nytte, saaledes have Opmaalinger paa Himlen først givet Anledning til Trigonometrie, som dog nu ikke blot i Astronomie, men i alle Dele af den anvendte Mathematik viser den største Nytte og meest udbredte Anvendelse.

§. 2.

I Geometrien have vi udmaalt Vinklerne ved at sammenligne dem med en ret Vinkel, der antoges som Maalestof; og da der var samme Forhold imellem de fra forskellige Vinkelspidser med samme Radius beskrevne Cirkelbuer som imellem Vinklerne, saa udtryktes ogsaa Vinklernes Størrelse i Buer, og man sammenlignede Buerne i

Ste.

Stedet for Vinklerne. Saa rigtig som dette er for at kunde angive alle muelige Vinklers Forhold til hinanden og deres Forhold til en ret Vinkel, saa lidet tiener det til at kunde i alle Tilfælde udtrykke Forholdet imellem Sider og Vinkler i en Triangel, og derved finde en fast Regel, hvorved de i Trigonometrien søgte ubekiendte Ting kunde findes. Ved et Exempel vil jeg oplyse det. I den ligesidede Triangel BFC (Fig. XLVII) vilde det være rigtigt, at Siderne forholde sig som de modstaaende Vinkler; thi $BF : BC = 1 : 1$

$$\text{og Vinklen } C : F = 60^\circ : 60^\circ = 1 : 1$$

(Geometr. §. 29. Till.), altsaa $BF : BC = C : F$ (Arithm. §. 69 og 70). Gælde vi derimod fra C en lodret Linie CA paa BF , da bliver Vinklen $FCA = ACB = \frac{1}{2}C$ og $FA = AB = \frac{1}{2}FB$ (Geomet. §. 13). I $\triangle AFC$ er altsaa $FC : FA = 1 : \frac{1}{2} = 2 : 1$, men Vinklerne $FAC : FCA = 90^\circ : 30^\circ = 3 : 1$, og folgelig vilde Proportionen $FC : FA = FAC : FCA$ være urigtig, og det vilde her ikke finde Sted, at Siderne forholde sig som de modstaaende Vinkler; man har derfor søgt at udtrykke Vinklernes Størrelse og Forhold til hinanden ved rette Linier, som man gav Navn af trigonometriske Linier.

I. Om de trigonometriske Linier.

§. 3.

Forklar. Beskrives fra Topunktet C af en Vinkel ACB (Fig. XLIV) med en vilkaarlig Radius en Cirkel, da vil et Stykke af Cirkelperipherien AB ligge imellem Vinklens Sider; fældes nu fra et af denne Bues Endepunkter (det Punkt, hvor den ene af Vinklens Sider skærer den) B eller A en lodret Linie BD paa den modstaaende Vinkel Side AC , da kaldes Linien BD Sinus for Buen AB og for Vinklen ACB . Det Stykke Linie AD , Sinus affiærer af Radius, kaldes den forkerte Sinus (sinus versus).

Lill. 1. Forlænges Sinus BD indtil den skærer Cirklen i I , saa er $DI = DB$, fordi $BC = CI$, $CD = CD$, og ved D rette Vinkler (Geomet. §. 32), folgelig $BD = \frac{1}{2}BI$; men BI er en Korde der underspender Buen BAI det dobbelte af Buen BA : Altsaa er Sinus til enhver Bue det halve af en Korde til en dobbelt saa stor Bue. For Ex. var Buen GAE (Fig. XLVII) $= 60^\circ$, altsaa $GE = CG = r$ (Geomet. §. 49. Lill. 2) saa var $GD = \text{Sin. } 30^\circ = \frac{1}{2}r$.

Anm.

Num. Af denne Egenſkab ved Sinus, at den er $\frac{1}{2}$ Chorde, har nogle vildet ublede Maſſagen, hvorfor denne Linie betegnes med Ordet *sinus*; det ſkulde nemlig fra Begyndelſen været ſemis inſcriptæ ($\frac{1}{2}$ Chorde), ſom blev ſkrevet ſ. inſ., og endelig forkortet til ſin., hvoraf ved en latiniſk Endelſe var blevet *sinus*. Mig forekommer denne Derivation ſagt, og jeg finder det meget rimeligt, at det er det latiniſke Ord *sinus* ſom er valgt, da den rekte Linie, det bruges til at udtrykke, vel ikke ſelv er en Bugt eller Bøining, men tiener dog til at udtrykke Størrelſen af en Bugt eller Bøining.

Till. 2. Sinus til Buen *BFK* eller Vinklen *BCK* (Fig. XLIV), der er ſtørre end 90° , er ogsaa Linien *BD*; thi efter Definitionen ſkal den være en lodret Linie fra *B* eller *K* paa den modſtaaende Side (ſom her maa forlænges), men fra *B* gives ingen anden lodret Linie paa *CK* end *BD*. Vuerne *BFK* og *BA* udgiøre 180° og faldes hin andens Complementer. Vilde man derimod fælde den fra *K*, vilde den falde paa den forlængede *BC*, og den ſamme Linie vilde da blive Sinus baade for Buen *BFK* og *Ki*, der ogsaa ſamlede udgiøre 180° . Alſaa have to Vuer, der ſamlede udgiøre 180° , een og ſamme Sinus.

Till. 2. Lader man Punktet *B* nærme ſig efterhaanden fra *A* til *F* og tænker ſig Chorder igiennem diſſe forſkiellige Punkter lodrette paa *AC*,
da

da *all* *E*horderne vore fra *o*, da *B* var i *A*, indtil *B* falder i *F*, da *E*horden bliver = Diameteren *FL*; derfra tage de igien af og blive igien *o* naar Punktet *B* falder i *K* saaledes, at *E*horderne i lige Afstand fra Diameteren *FK* paa begge Sider, som f. Ex. *BI* og *bi*, blive ligestore (*Geomet.* §. 42). Hvad der er sagt om de hele *E*horder, gielder ogsaa om de halve; *Sinuserne* vore altsaa, naar deres *Buer* vore fra *A* til *F*: fra 0° til 90° . I *F* var *E*horden ligestor med Diameteren, *Sinus* altsaa for *Buen AF* eller 90° ligestor med *Radius*. Bliver *Buen* større end 90° , da blive *E*horderne mindre jo mere Punktet *b* nærmer sig *K* eller jo mere *Buen* nærmer sig til 180° . *Sinuser* til *Buer* fra *F* til *K*: fra 90° til 180° , tage altsaa af, naar *Buerne* tage til, indtil endelig *Sinus* for 180° er = *o*.

Till. 4. *Stiærer CB* forlænget *Cirkelns Omkreds* i *i*, saa er di *Sinus* til *Buen AFKi*, men $di = BD = bd$; en *Bue* over 180° har altsaa en *Sinus*, der er ligesaa stor som *Sinus* til den *Bue*, der udgior hvad den første er større end 180° . Saaledes have her *Buen AFKi* samme *Sinus* som $Ki = AB$. Det samme gielder for *Buen AFKI*, der er over 270° , der har til *Sinus* $DI = bd = BD = \text{Sin. Buen BFK}$, der er ligestor med *Buen KiI*, dens *Overskud* over 180° .

Till.

Till. 5. Sinus til alle Vuer fra 0° til 360° er saaledes mindre end Radius, undtagen Sinus for 90° og for 270° . De voxer i den første Qvadrant fra 0 til de blive $= r$, tage af i den anden fra r til 0, voxer i den tredje fra 0 til r , og tage af i den fjerde fra r til 0. Man kan derfor ansee alle Sinuser som Brøk eller Dele af Radius, som derfor kaldes sinus totus (den hele Sinus), da Sinus for 90° og for 270° ogsaa er ligestor med Radius (Till. 3 og 4), bruges ogsaa Udtrykket sinus totus for Sinus 90° og Sinus til 270° .

Till. 6. Da alle Sinuser for Vuer imellem 180° og 360° falde paa den modsatte Side af Diameteren AK , saa kan de i Sammenligning med dem paa den anden Side anses som nægtende (Arithm. §. 39). Det samme sees af Maaden, hvorpaa de fremkomme (Till. 4). Radius eller sinus totus være r , $AB = 60^\circ = Ki = IA$, altsaa $ABKi = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$ og $AFKiI = 360 - 60^\circ = 300$, saa er $\text{Sin. } 60^\circ = + BD$, men $\text{Sin. } 240^\circ = \text{Sin. } 300^\circ = - di$ (men $di = BD$). Det Modsatte i de to Sinuser BD og di ligger i deres Direction; der ere modsat, hvad enten man paa enhver gaar fra det Punkt, hvor de staae AK til det hvor de staae mod Vuen eller fra dette til hiint; men

men ved di og DI ere Directionerne ikke modsatte, de have derfor eens Tegn.

Sinuserne ere altsaa bekræftende i første og anden Quadrant, og nægtende i tredje og fjerde.

Till. 7. Sinus vers. voxer for Buer fra 0° til 180° , fra 0 til den bliver ligestor med Diameteren, og tager igien af for Buer fra 180° til 360° , fra at være ligestor med Diameteren til den bliver 0; den er altid bekræftende.

§. 4.

Forkl. Trækkes til et af Buens Endepunkter A eller B en Tangent (Geom. § 46 Till. 1), som GA , og den anden Vinkelside eller den Radius som skærer Buen i B forlænges til den overskærer Tangenten i G ; da er AG Tangent og CG Sekant til den bestemte Bue AB og til Vinklen ACB .

Till. 1. Tangenten til Buen AFb er Ag = — AG efter de antagne Størrelser af disse Buer (§. 3. Till. 1), Tangenten til Buen $AFKi$ bliver igien Linien AG selv, og Tangenten til Buen $AFKiI$ er Ag eller — AG . Tangenterne er saaledes i første og tredje Quadrant bekræftende, men i anden og fjerde benægtende.

Till. 2. Dreier Linien CB sig fra A mod F , saa bliver Gennemsnitspunktet for Tangenten og

Secan-

Secanten G steds længere borte fra A , indtil det endelig, naar CB falder sammen med CF og bliver parallel med AG (Geom. §. 25), bliver uendelig, langt borte og ikke kan angives. Dreier CB sig videre, indtil *b f. Ex.*, saa er det ikke mueligt at den kan skære AG uden saavel den som Tangenten forlænges paa den modsatte Side af Diameteren, da Skæringspunktet bliver g ; kommer den derefter til K , vil den, forlænget til den modsatte Side, falde sammen med AC . Dreier CB sig endnu videre indtil i , bliver Siennemsnitspunktet igien G . Kommer CB til L , bliver den igien parallel med AG ; kommer den videre til I , saa er Skæringspunktet igien G , og endelig falder den igien sammen med CA .

Tangenterne voxe altsaa i den første Kvadrant og Tangenten til 90° er $= \infty$; i den anden Kvadrant tage de negative Tangenter af som Buerne voxe, og Tang. $180^\circ = 0$; i den tredje Kvadrant voxe igien de bekræftende Tangenter, og Tang. $270^\circ = \infty$; i den fjerde aftage atter de nægtende, og Tang. $360^\circ = 0$.

Till. 3. Secanterne voxe i den første Kvadrant fra r til ∞ , og ere bekræftende; i den anden tage de af fra ∞ til r , og ere nægtende; i den tredje voxe de fra r til ∞ og ere ^{nægtende} bekræftende; i den fjerde tage de af fra ∞ til r , og ere nægtende.

Anm.

Anm. De hidtil forklarede trigonometriske Linier Sinus, Sinus versus, Tangens og Secans kunde ansees som de trigonometriske Hovedlinier, de følgende derimod som Bilknier.

§. 5.

Forfl. Oprettes fra C en Linie CF lodret paa AC , da kaldes Vinklen BCF Opfyldningsvinkel (Complement) baade til den spidse Vinkel ACB og til den stumpe BCK . Vuen BF faaer ogsaa Navn af Complement saavel til Vuen AB som til Vuen BFK . Sinus til denne Vue BF , som er $BE = DC$, kaldes Cosinus (Complementets Sinus) til Vuen AB og til Vinklen ACB .

Till. 1. Cosinus til Vuen AFb er Linien $bE = Cd = -CD$ ∴ Cosinus til en Vue imellem 90 og 180° er ligestor med Cosinus til en Vue, der er ligesaameget under 90° som denne er over, men negativ. Saaledes er her Cosinus for Vuen $AC = CD$ og for Vuen $ABb = -CD$.

Till. 2. I den første Quadrant tager Cosinus af naar Vuerne voxe indtil den, naar Vuen er 90° , bliver $= 0$ eller forsvinder; den er bekræftende. I den anden Quadrant tager den igien til, indtil Vuen er 180° , da Cosinus er $= r$, den er benægtende. I den tredje Quadrant tager den af som i første, men er benægtende; i fjerde Quadrant voxe den som i anden, og er bekræftende.

§. 6.

§. 6.

Forkl. Complement, Buens eller Vinklens Tangent HF kaldes Cotangent til Buen AB eller Vinklen ACB , og Linten CH Cosecant.

Fill. 1. Da Vinklen $AGC = GCF$ (Geom. §. 28) og ved F og A rette Vinkler, saa er $\triangle GAC \sim \triangle HFC$ (Geom. §. 68) og $AG : AC = CF : FH$ eller Tangenten af enhver Vinkel, som vi vil kalde x , forholder sig til Radius som Radius til Cotangenten af samme Vinkel x :
 $\text{Tang. } x : r = r : \text{Cotang. } x$ og $\text{Cotang. } x =$
 $\frac{r^2}{\text{Tang. } x}$.

For en anden Vinkel y vil Cotangens

ligeledes være $= \frac{r^2}{\text{Tang. } y}$; følgelig $\text{Cotang. } x$;

$\text{Cotang. } y = \text{Tang. } x : \text{Tang. } y$ Cotangenterne have derfor i de forskellige Quadranter samme Tegn som Tangenterne.

Fill. 2. Da $\triangle CBD \sim \triangle CFH$ (Geom. §. 68), saa er $BD : BC = CF : CH$ eller

$\text{Sin } x : r = r : \text{Cossecans } x$, altsaa $\text{Cossecans } x$
 $= \frac{r^2}{\text{Sin. } x}$, og har derfor samme Tegn som Si-

nus x .

Anm. Benævnes en Bue eller en Vinkel udtrykt i Grader med et Bogstav a, x, y &c., da skrives for Kortheds Skyld sin. x (Sinus for Vinklen eller Buen

Buen af x Grader), $\cos. x$ (Cosinus), $\tan. x$ (Tangenten til Buen eller Vinklen x), $\cot. x$ (Cotangenten), $\operatorname{cosec.} x$ (Cosecanten), og $\sin. \operatorname{vers.} x$ og $\cos. v. x$ (Sinus versus og Cosinus versus). Saa ofte Udtrykket $\sin. x^2$, $\cos. x^2$ eller lignende forekomme, da hører Exponenten ikke til Buen x , men til den rette Linie; det skulde derfor egentlig skrives $(\sin. x)^2$, $(\cos. x)^2$ o. s. v.

§. 7.

Opgave. At bestemme de øvrige trigonometriske Linier for enhver given Vinkel x , naar Radius antages $= r$, og $\sin. x$ er bestemt.

Oplosn. 1) Den givne Vinkel x være ACB (Fig. XLIV), $CB = r$, og $BD = \sin. x$; vi have da i den retvinklede $\triangle BDC$, $DC^2 = BC^2 - BD^2$ (Geom. §. 37), men $DC = BE = \cos. x$ (§. 5), altsaa $\cos. x^2 = r^2 - \sin. x^2$; deraf $\cos. x = \sqrt{r^2 - \sin. x^2}$.

2) $\sin. \operatorname{vers.} x$ var Linien AD (§. 4), men $CA - CD = AD$, altsaa $\sin. \operatorname{vers.} x = r - \cos. x$.

3) I den retvinklede $\triangle AGC$ er $BD \perp AG$ og (Geomet. §. 60) $CD : DB = CA : AG$: $\cos. x : \sin. x = r : \tan. x$ og $\tan. x = \frac{r \times \sin. x}{\cos. x}$. I samme Triangel er $CD : CA =$

$CB : CG$

$$CB : CG :: \cos. x : r = r : \sec. x \text{ og } \sec. x = \frac{r^2}{\cos. x}$$

4) I $\triangle CHF$ er $BE = HF$, og altsaa $CE : EB = CF : FH :: \sin. x : \cos. x = r : \cot. x$ og $\cot. x = \frac{r \times \cos. x}{\sin. x}$. Videre

er i samme Triangel $CE : CF = CB : CH :: \sin. x : r = r : \operatorname{cosec}. x$ og $\operatorname{cosec}. x = \frac{r^2}{\sin. x}$.

5) $\operatorname{cosec}. \operatorname{vers}. x = FE = CF - CE = r - \sin. x$.

Till. 1. Disse Former vise, at naar Sinus for en Vinkel er givet, lade sig deraf alle de øvrige til samme Vinkel hørende trigonometriske Linier bestemme. Og skøndt de (vel egentlig kun passe for Buer og Vinkler under 90° , saa kan de, naar blot Tegnene efter de foregaaende §§. forandres, ogsaa anvendes for Buer over 90° . Saaledes er $\sin. \operatorname{vers}. x = r - \cos. x$; men er det for en Bue over 90° , da er $\sin. \operatorname{vers}. x = r - (-\cos. x) = r + \cos. x$, thi Cosinus for Buer imellem 90° og 180° ere nægtende (§. 5. Till. 2).

Till.

Lill. 2. Ogsaa følger heraf (sammenlignet med §. 3, 4, 5, 6), at to Buer, der samlede udgøre 180° , have ligestore trigonometriske Sinier, naar den ene nemlig sin. vers. undtages.

Lill. 3. Anvendelsen af de udfundne Former seer tydeligere af et Exempel. Lad Vinklen x være $= 30^\circ$, dens Sinus er da $= \frac{1}{2}r$ (§. 3. Lill. 3); og sætte vi $r = 1$ (som den almindelig antages naar man vil beregne trigonometriske Sinier), saa have vi efter den udfundne Form $\cos. x = \sqrt{r^2 - \sin. x^2}$ her $\cos. 30^\circ = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1,732 \dots}{2} = 0,866 \dots$ sin. vers. $x = r - \cos. x$, altsaa sin. vers. $30^\circ = 1 - 0,866 \dots = 0,134 \dots$ tang. $x = \frac{r \times \sin. x}{\cos. x}$, folgelig tang. $30^\circ = \frac{0,5}{0,866} = 0,587 \dots$ o. s. v.

Lill. 4. Sættes $x = R$, da er $\cos. x = \sqrt{r^2 - r^2} = 0$ (§. 5.) og tang. $x = \frac{\sin. x}{\cos. x} = \frac{r}{0} = \infty$ (§. 5), Secans $x = \frac{r^2}{\cos. x} = \frac{1}{0} = \infty$.

§. 8.

Læres. De forskellige eensvæbnede trigonometriske Linier til ligedanne Buer, og altsaa til ligestore Vinkler, forholde sig som de forskellige Radier, hvorved Buerne ere beskrevne.

Bevis. Fra Topunktet C i Vinklen ACB (Fig. XLV) beskrives med Radierne CA og Ca de ligedanne Buer AB og ab . Man trækker deres Sinuser BD og bd , Tangenterne AG og aI , Cosinuserne blive da CD og Cd , Secanterne CG og CI , Sin. vers. AD og ad . Fuldføres Buen AB til F og ab til f , bliver HF og hf Contangenter, men CH og Ch Coscancer for Buerne AB og ab .

I Trianglen AGC ere Linierne GA , IA , BD og bd parallelle, og vi have altsaa følgende Proportioner (Geom. §. 25 og 60):

$CB : Cb = BD : bd$, \therefore Radierne som Sinuserne

$CA : Ca = AG : aI$, \therefore Rad. som Tangenterne

$CB : Cb = CD : Cd$, \therefore Rad. som Cosinuserne

$CA : Ca = CG : Cg$, \therefore Rad. som Secanterne

$CF : Cf = FH : fh$, \therefore Rad. som Cotangenterne

$Cf : Cf = CH : Ch$, \therefore Rad. som Coscancerne

$CA : Ca = CD : Cd$, og deraf (Arithm. §. 73, 3)

$CA :$

$CA : Ca = (CA - CD) : (Ca - Cd)$, og
 $CA : Ca = AD : ad$, ∴ Radierne som de forskellige sin. vers.

Anm. At dette egentlig for spidse Vinkler eller Buer under 90° førte, Bevis ogsaa gielder for stumpe Vinkler eller Buer over 90° , sees let af §. 7. Till. 3.

Till. Har man, som §. 8 er viist, beregnet de trigonometriske Linier for en vis Vinkel eller Bue x under den Betingelse, at Radius $= 1$ og man betegner disse sin. x , tang. x ic.; antages da en anden Radius $= r$ og de trigonometriske Linier for den givne Vinkel, svarende til denne Radius, betegnes med de store Bogstaver Sin. x , Tang. x o. s. v. : saa forholde $1 : r = \text{sin. } x : \text{Sin. } x$, og $\text{Sin. } x = r \times \text{sin. } x$; ligeledes $1 : r = \text{tang. } x : \text{Tang. } x$, og $\text{Tang. } x = r \times \text{tang. } x$. Man kan saaledes bruge de til Radius 1 beregnede trigonometriske Linier ogsaa for enhver anden Radius, naar de alle multipliceres med denne. Til Ex.: $\text{sin. } 30^\circ = 0,5$ (§. 7 Till. 3); sættes nu $r = 10000$, saa er $\text{sin. } 30^\circ = 0,5 \times 10000 = 5000$, $\text{cos. } 30^\circ = 0,866$, altsaa $\text{cos. } 30^\circ = 0,866 \times 10000 = 8660$ o. s. v.

Anm. Det er viist, at alle trigonometriske Linier ere afhængige af Sinus og den antagne Radius,
 og

og at de alle; naar Sinus er givne, lade sig efter de fundne Formeler beregne. Det staaer tilbage at vise, hvorledes Sinus for enhver Bue findes, naar Radius antages for Eenheden (sættes $= 1$). Da Sinus for enhver Vinkel eller Bue er det Halve af Chorden til en dobbelt saa stor Vinkel eller Bue (§. 3 Till. 1), saa findes Sinuserne ved at søge Chorderne til de dobbelte Buer; disse Chorder, der kan ansees som Sider i regulære Polygoner, findes for en Deel efter den plane Geometrie (§. 102). Dog er det for at indsee Mueligheden af fuldstændige: saadanne, hvort findes de trigonometriske Linier for hver Bue i den første Quadrant fra Minut til Minut i det mindste trigonometriske Tabellers Beregning nødvendigt at gjøre sig bekendt med følgende hidhørende Sætninger.

§. 9.

Læres. I enhver Triangel ABD (Fig. XLVI) forholde Siderne sig til hinanden som Sinuserne af de modstaaende Vinkler: $AD: BD = \text{Sin. } ABD : \text{Sin. } DAB$.

Bevijs. Om Trianglen beskrives en Cirkel (Geom. §. 41) og fra Centrum C trækkes Linierne CA , CD og CE , saa er AD Chorde for Vinklen ACD , og altsaa $\frac{1}{2}AD = \text{Sin. } \frac{1}{2}ACD$, men Vinklen $ACD = 2ABD$ og $\frac{1}{2}ACD = ABD$, altsaa $\frac{1}{2}AD = \text{Sin. } ABD$. Paa samme Maade sees, at $\frac{1}{2}BD = \text{Sin. } DAB$. Altsaa er $\frac{1}{2}AD :$
anden Deel. Trigonometrie. $\frac{1}{2}BD$

$\frac{1}{2}BD \equiv \text{Sin. } ABD : \text{Sin. } DAB$, men $\frac{1}{2}AD :$
 $\frac{1}{2}BD \equiv AD : BD$, følgelig $AD : DB \equiv \text{Sin.}$
 $ABD : \text{Sin. } DAB$.

§. 10.

Opgave. Naar i en ligebenet Triangel ACB (Fig. XLVIII) af de tre Ting, Grundlinien AB , et af de ligelange Been AC , og Sinus for den halve Vinkel ved Toppen ($\text{Sin. } \frac{1}{2}ACB$), de to ere givne, at finde det tredje.

Oplosn. Fra Toppunktet sælbes CD lodret paa AB , saa er $AD \equiv \frac{1}{2}AB$ og Vinkl. $ACD \equiv \frac{1}{2}ACB$ (Geomet. §. 13), og $AC : AD \equiv \text{Sin. } ADC : \text{Sin. } ACD$ ($\frac{1}{2}ACB$), men $\text{Sin. } ADC \equiv r \equiv 1$ (§. 3. Till. 3), altsaa $AC : \frac{1}{2}AB \equiv 1 : \text{Sin. } \frac{1}{2}ACB$. Følgelig^m er 1) $\text{Sin. } \frac{1}{2}ACB \equiv \frac{\frac{1}{2}AB}{AC} \equiv \frac{AB}{2AC}$ 2) $AB \equiv 2AC \times \text{Sin.}$

$$\frac{1}{2}ACB. \quad 3) \quad AC \equiv \frac{AB}{2 \times \text{Sin. } \frac{1}{2}ACB}$$

Till. 1. Udtrykke vi Linierne med almindelige Tegn og sætte $AC \equiv a$, $AB \equiv b$, Vinklen

$$ACB \equiv x, \text{ saa have vi 1) } \text{Sin. } \frac{1}{2}x \equiv \frac{b}{2a}$$

$$2) \quad b \equiv 2a \times \text{Sin. } \frac{1}{2}x. \quad 3) \quad a \equiv \frac{b}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2}x}$$

Till.

Fig. 2. Sættes Radius i Stedet for Enheden at være r , saa findes 1) $\text{Sin. } \frac{1}{2}x = \frac{rb}{2a}$.

2) $b = \frac{2a \times \text{Sin. } \frac{1}{2}x}{r}$. 3) $a = \frac{rb}{2 \text{ Sin. } \frac{1}{2}x}$.

Fig. 3. Trækkes AF lodret paa CB , saa er $\text{Sin. } B = \text{Cos. } \frac{1}{2}x$ (§. 5. Fig. 2), altsaa $\text{Cos. } \frac{1}{2}x$:

$\text{Sin. } x = a : b$, og $b = \frac{a \text{ Sin. } x}{\text{Cos. } \frac{1}{2}x}$.

Anm. Disse Former tiene til, af Siderne at finde Vinklerne, som og af Vinklerne og een Side at finde de andre.

§. II.

Opgave. Naar Sinus og Cosinus for en Vinkel ere givne, da at finde Sinus til en dobbelt saa stor Vinkel; og, naar Cosinus til en Vinkel er givet, at finde Sinus og Cosinus for en halv saa stor Vinkel.

Oplosn. 1) Den givne Vinkel være ACD (Fig. XLVIII). Sættes nu som i forrige §. $AC = a$ og $AB = b$, og Vinklen $ACB = x$, saa er $ACD = \frac{1}{2}x$; men nu var $b = 2a \times \text{Sin. } \frac{1}{2}x$ (§. 10), ligeledes var $b = \frac{a \times \text{Sin. } x}{\text{Cos. } \frac{1}{2}x}$.

(§. 10. Till.), altsaa $2a \times \sin. \frac{1}{2}x = \frac{a \times \sin. x}{\cos. \frac{1}{2}x}$

altsaa $2 \sin. \frac{1}{2}x = \frac{\sin. x}{\cos. \frac{1}{2}x}$, følgelig $\sin. x =$

$2 \sin. \frac{1}{2}x \times \cos. \frac{1}{2}x = 2 (\sin. \frac{1}{2}x \times \cos. \frac{1}{2}x)$.

Antage vi nu $\frac{1}{2}x = a$, saa er $x = 2a$ og $\sin. 2a = 2 (\sin. a \times \cos. a)$: Sinus for det dobbelte af en Vinkel findes ved at tage det dobbelte Produkt af den enkelte Vinkels Sinus og Cosinus.

2) Antage vi i den nævnte Figur (XLVIII) $\angle ACB = x$. hvis Cosinus er bekendt, og fælde Linien AF lodret paa CB , saa er $\triangle AFB \sim \triangle CDB$ (Geom. §. 68) og $FB : AB = BD : CB$, men $BD : CB = \sin. \frac{1}{2}x : r$ (og naar $r = 1$) $= \sin. \frac{1}{2}x : 1$. Fremdeles, da $FB = CB - CF$ og $AB = 2BD$, er $CB - CF : 2BD = \sin. \frac{1}{2}x : 1$; men $CB - CF = 1 - \cos. x$, og $BD = \sin. \frac{1}{2}x$, altsaa $1 - \cos. x : 2 \sin. \frac{1}{2}x = \sin. \frac{1}{2}x : 1$, følgelig $2 (\sin. \frac{1}{2}x)^2 = 1 - \cos. x$ og $\sin. \frac{1}{2}x^2 = \frac{1 - \cos. x}{2}$, og $\sin. \frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1 - \cos. x}{2}}$. Af dens

de Værdie findes (§. 7) $\cos. \frac{1}{2}x = \sqrt{1 - \sin. \frac{1}{2}x^2}$, følgelig, naar den fundne Værdie for $\sin. \frac{1}{2}x$ indsættes,

$$\text{sættes, saa vi } \cos. \frac{1}{2}x = \sqrt{1 - \left(\frac{1 - \cos. x}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2 - 1 + \cos. x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos. x}{2}}. \text{ Vi ha}$$

$$\text{ve saaledes fundet 1) } \sin. \frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1 - \cos. x}{2}}$$

$$\text{og 2) } \cos. \frac{1}{2}x = \sqrt{\frac{1 + \cos. x}{2}}; \text{ 3: af den givne}$$

Sinus og Cosinus for den hele Vinkel x bestemte Sinus og Cosinus for den halve Vinkel $\frac{1}{2}x$.

§. 12.

Opgave. Naar Sinus og Cosinus for to Vinkler $ACB = a$ og $BCD = b$ (Fig. XLIX) ere givne, da at finde Sinus og Cosinus for deres Summa som er $\angle ACD = a + b$.

Opløsn. De givne Sinuser og Cosinuser gøres bestuelige ved Tegning, og man har $BE = \sin. a$, $CE = \cos. a$, $DG = \sin. b$, $CG = \cos. b$; paa samme Maade ere de søgte synlige, nemlig $DF = \sin. (a + b)$ og $FC = \cos. (a + b)$. Linien GK fældes lodret paa AC (Radius, der antages $= 1$) og GK lodret paa FD . Den søgte Sinus for $a + b$ er $DF = FH + HD$, der findes saaledes: I $\triangle CBE$ er $GK \pm BE$, altsaa (Geom. §. 60) $CB : BE = CG : GK$; d. e. $1 : \sin. a = \cos.$

$\equiv \cos. b : GK$, men $GK = HF$ og $\equiv HF$ saaledes
 $\sin. a \times \cos. b$. Videre er $\triangle DGH \sim \triangle GHL$ (Geom.
 §. 71) $\sim \triangle LFC \sim \triangle CBE$, og saaledes $\triangle DGH$
 $\sim \triangle CBE$, altsaa $CB : CE = DG : DH$ $\therefore 1 : \cos. a = \sin. b : DH$ og $DH = \cos. a \times \sin. b$;
 følgerig $HF + HD = \sin. a \times \cos. b + \cos. a \times \sin. b$,
 men $FH + HD = FD = \sin. (a + b)$,
 altsaa $\sin. (a + b) = \sin. a \times \cos. b + \cos. a \times \sin. b$. Den søgte $\cos. (a + b)$ er $= CF$
 $= CK - KF$, der findes saaledes: I $\triangle CBE$
 er $CB : CG = CE : CK$ $\therefore 1 : \cos. b = \cos. a : CK$ og $CK = \cos. a \times \cos. b$. Videre er
 som før $\triangle DGH \sim \triangle CBE$, altsaa $CB : BE = DG : GH$ $\therefore 1 : \sin. a = \sin. b : GH$ og
 $GH = \sin. a \times \sin. b$, men $GH = KF$, saa-
 ledes $KF = \sin. a \times \sin. b$. Nu var $\cos. (a + b) = CK - KF$, altsaa $\cos. (a + b) = \cos. a \times \cos. b - \sin. a \times \sin. b$.

Eill. Sættes $a = b$, saa er $\sin. a + b = \sin. 2a = \sin. a \times \cos. a + \cos. a \times \sin. a = 2 (\sin. a \times \cos. a)$, som er det samme der fandtes §. 11.

§. 13.

Opgave. Naar Sinus og Cosinus for to Vinkler ACB og DCB (Fig. L) ere givne

da

da at finde Sinus og Cosinus for deres Difference \therefore Vinklen ACD .

Oplosn. Antag Vinklen $ACB = a$ og $DCB = b$, saa er Vinklen $DCA = a - b$. Med Radius $BC = 1$ beskrives Buen ADB , saa er $BE = \sin. a$, $EC = \cos. a$, $DG = \sin. b$, $CG = \cos. b$, $DF = \sin. (a - b)$ og $CF = \cos. (a - b)$. Man trækker $GH \mp BE$, forlænger FD og CB til de skjære hinanden i L , og trækker $GK \pm AC$. Nu forholde i $\triangle CBE$; $CB : BE = CG : GH \therefore 1 : \sin. a = \cos. b : GH$ og $GH = KF = \sin. a \times \cos. b$; fremdeles er $\triangle DKG \sim KGL$ (Geom. §. 71) $\sim LFC \sim CBE$, altsaa $BC : CE = GD : KD \therefore 1 : \cos. a = \sin. b : KD$ og $KD = \cos. a \times \sin. b$; men $FK - KD = FD = \sin. (a - b)$, altsaa $\sin. (a - b) = \sin. a \times \cos. b - \cos. a \times \sin. b$. Ligesaa er $\cos. (a - b) = FC = CH + HF$. Værdien af denne findes ved at betragte de samme Trianglers Lighedanhed, nemlig: i $\triangle CBE$ er $CB : CG = CE : CH \therefore 1 : \cos. b = \cos. a : CH$ og $CH = \cos. a \times \cos. b$. $\triangle DKG \sim \triangle CBE$ og $CB : BE = DG : GK \therefore 1 : \sin. a = \sin. b : GK$ og $GK = \sin. a \times \sin. b$, men $GK = FH$ saaledes $FH = \sin. a \times \sin. b$, og vi havde $CH = \cos. a \times \cos. b$, følgelig $FH + CH = FC = \cos. (a - b) = \cos. a \times \cos. b + \sin. a \times \sin. b$.

XIII. Sætte vi $a = b$ og $a - b = 0$,
 saa er $\sin. (a - b) = \sin. a \times \cos. a - \cos. a$
 $\times \sin. a = 0$, og $\cos. (a - b) = \cos. 0 =$
 $\cos. a^2 + \sin. a^2 = 1$.

Ann. 1. Ved Hjælp af den i Geometrien (§. 102) forklarede Methode, af en Polygon-Side og en given Radius at finde Siden til en anden Polygon af et dobbelt Antal Sider, kan man, ved at begynde med en regulair Sex- eller Firkant, finde Chorden til en Centervinkel af een Second, og deraf ved Hjælp af de her forklarede Sætninger finde Sinus for 'ene hver Bue, hvoraf efter de (§. 7) supndne Former de øvrige trigonometriske Linier lade sig bestemme, og, saamange som behøves, bringe i Tabeller; hvilke almindeligt kaldes trigonometriske Tavler eller Sinus-Tavler. Dog bruges til at forkorte disse overmaade vildtløftige Beregninger mangfoldige Kunstgreb, som her ikke kan forklares.

Ann. 2. Til de i saadanne Tavler beregnede Tal for enhver trigonometrisk Linie kan man søge Logarithmerne i de almindelige Logarithme-Tavler (Algeb. §. 81). Men, for at spare den dobbelte Umage, har man indrettet Tavler, hvor man strax finder de til enhver i Tal beregnet trigonometrisk Linie svarende Logarithmer. Saadanne Tabeller kaldes Kunstige trigonometriske Tabeller i Modsatning af de (Ann. 1) omtalte, der kaldes naturlige.

Ann. 3. Ved Trigonometriens Anvendelse eller Opløsning af trigonometriske Opgaver kan man alt-
 saa

saa udføre Beregningerne paa to Maader: enten efter naturlige eller Kunstige Tabeller; Brugen af Kunstige Tabeller er i de fleste Tilfælde det fordelagtigste. Men dog er det aldeles nødvendigt at lære at kende Indretningen og Brugen af begge Slags Tabeller.

II. Om Indretningen og Brugen af trigonometriske Tabeller.

§. 14.]

I de sædvanlige Tabeller findes allene Sinus, Cosinus, Tangens og Cotangens, da disse ere de Linier der oftest bruges, og de øvrige desuden ved Hjælp af de anførte Former let lade sig bestemme. Ligeledes sees af det hidtil forklarede, at Tabellerne kun behøve at indeholde de trigonometriske Linier for den første Quadrant, da de for de øvrige have samme Størrelse og kun forandret Beliggenhed. For at have Complementet til enhver Vinkel lige over for den, saa at med eet kan sees baade dens Sinus og Cosinus, Tangens og Cotangens, ere Tabellerne saaledes indrettede, at Graderne fra 0 til 45 ere betegnede øverst paa Siden og deres fortløbende Minuter i den første Pil'e paa venstre Side fra oven og ned, derimod Graderne fra

fra 45 til 90 for neden og deres Minuter i den yderste Pille paa høire Side fra neden og opad; saa at naar for oven paa en Side findes f. Ex. 37° , og altsaa i den tiende Linie fra oven Sinus og Tangens for $37^{\circ} 10'$, da findes forneben 52° , og i samme Linie, hvor de $10'$ stod paa venstre, findes paa høire $50'$. Man har derved den Fordeel, at den Colonne Tal, der angiver Sinus og Tangens for den ene Vinkel, angiver tillige Cosinus og Cotangens for den anden som er dens Complement, og omvendt.

§. 15.

I de almindelige Tabeller antages ikke som her $r = 1$, da alle Sinuser saaledes vilde blive Brøk, men sædvanlig antages den $= 10000,000000$ og af de derefter beregnede Linier (hvorledes de for Radius $= 1$ beregnede Linier kunde forandres efter enhver Radius, er viist (§. 8. Till.)) har man i de smaae Udgaver af Tabeller udeladt de tre sidste Sifre, og altsaa egentlig kun antaget Radius $= 10,000000$.

Logarithmerne for de trigonometriske Linier i alle Tabeller have Hensyn til en Radius af 10000000000 . Derfor er Log. $r = 10$ (Algeb. §. 77); denne er selvfølgelig for stor, naar man kun som i de almindelige Tabler sætter $r = 10000000$.

Dette

Dette forårsager imidlertid ingen Feil i de trigonometriske Beregninger, da man ved de i Tal udtrykte Linier, hvortil Logarithmerne svare, ikke see paa deres virkelige Størrelse, men kun paa deres Forhold til hinanden. For Resten kan man let forandre Logarithmerne, saa at de svare til Linier beregnede for $r = 1$, naar man blot subtraherer 10 fra deres Characteristik; saaledes Log. sin. 90° (naar Radius er ti tusinde Millioner) $= 10,00000000$ (i de mindre Tabeller anføres kun i Logarithmerne syv Decimaler), men Log. sin. 90° (naar Radius er 1) $= 0,00$.

§. 16.

De mindre trigonometriske Tabeller indeholde blot Grader og Minuter; de større derimod tillige Secunder, eller i det mindste Differencen for en Secund, og forskaffe derfor saavel større Bequemmelighed som Nøiagtighed.

I Vegas Haandbog (Algeb. §. 77. Anm. 2) indeholder den anden Tabel Logarithmerne for de trigonometriske Linier; jeg vil, som i Algebra ved Logarithmernes Forklaring, benytte mig af den og citere den. De naturlige Linier (Sinus, Tangens &c.), som her for Kummers Skyld ere udeladte, kunde og heraf ved Hielp af den første Tabel findes. I Vegas større Tabeller findes disse.

Brn.

Brugen af disse Tabeller læres upaatvibelig lettest ved mundtlig Anvisning og umiddelbar Øvelse. Jeg vil derfor blot med Hensyn til den ommeldte Begas Haandbog ved et Par Exempler søge at oplyse Maaden, hvorpaa man gaaer frem.

§. 17.

O p g a v e. At finde Logarithmerne for de trigonometriske Linier der høre til en given Bue eller Vinkel, der er udtrykt allene i Grader og Minuter.

Oplosn. 1) Er de givne Grader under 45, da søger man Graderne øverst paa Siden i Tabellen og Minuterne i første Pille paa venstre Haand fra oven og ned ad; ved Siden af Minuterne findes da (fra Venstre mod Høire) Logarithmer for Sinus, Cosinus, Tangens og Cotangens til den givne Bue eller Vinkel. S. Ex.:

1) Den givne Bue være $6^{\circ} 35'$; man finder da S. 239 ved $6^{\circ} 35'$

Log. sin. $\equiv 9,0593672$. Log. cos. $\equiv 9,9971268$

Log. tang. $\equiv 9,0622403$. Log. cot. $\equiv 10,9377597$.

2) Buen være $1^{\circ} 23'$, og man finder S. 203 ved $1^{\circ} 23'$

Log. sin. $\equiv 8,3827620$. Log. cos. $\equiv 9,9998734$

Log. tang. $\equiv 8,3828886$. Log. cot. $\equiv 11,6171114$

II)

II) Ere de givne Grader over 45, saa søger man Gradetallet nederst paa Siden og Minuterne i den yderste Pille mod Høire fra neden opad, og man finder ved Siden af Minuterne fra Høire mod Venstre Logarithmerne for den givne Bues Tangent, Cotangent, Sinus og Cosinus. S. Ex.

1) Den givne Bue være $83^{\circ} 25'$, og man finder S. 239 ved $83^{\circ} 25'$

Log. tang. $\text{---} 10,9377597$. Log. cot. $\text{---} 9,0622403$

Log. sin. $\text{---} 9,9971268$. Log. cos. $\text{---} 9,0593672$

2) Buen være $88^{\circ} 37'$; man finder da Side 203 ved $88^{\circ} 37'$

Log. tang. $\text{---} 11,6171114$. Log. cot. $\text{---} 8,3828886$

Log. sin. $\text{---} 9,9998734$. Log. cos. $\text{---} 8,3827620$.

§. 18.

Opgave. At finde Logarithmerne for de trigonometriske Linier til en i Grader, Minuter og Sekunder udtrykt Bue.

Her gives efter de omtalte Tabellers Indretning tvende Tilfælde:

A) Naar den givne Bue er over 5, men dog under 85 Grader.

Opløsni. For Grader og Minuter søges som i forrige Opgave Logarithmerne i Tabellen fra S. 239 til Enden; det i den Pille, som for oven er beteg-

betegnet $D 1''$ (det e. Differencen for en Sekund) ved Siden af den fundne Logarithme staaende Tal multipliceres med Antallet af de givne Sekunder, og det Udfomne lægges til den fundne Logarithme eller tages derfra eftersom den ved Buernes For-
 størrelse voxer eller aftager. Den med $CD 1''$ (communis differentia) betegnede Pille imellem Log. tang. og Log. cot. hører til begge, efterdi

$$\text{cot. } x = \frac{r^2}{\text{tang. } x} \quad (\S. 7) \quad \text{og} \quad r^2 = \text{tang. } x \times$$

cot. x , følgelig $2\text{Log. } r = \text{Log. tang. } x + \text{Log. cot. } x$ (Algebra §. 75), altsaa $2\text{Log. } r = \text{Log. tang. } x + d + \text{Log. cot. } x - d$.

Lad til Exempel den givne Bue være $6^\circ 35' 3''$; man finder da S. 239 ud for $6^\circ 35'$

$$1) \text{Log. sin.} = 9,0593672 \text{ og } D 1'' = 182,25 \times 3''$$

hertil lægges for

$$\text{de 3 Sekunder} + \frac{547}{100} \text{ da Brøken } \frac{75}{100} \text{ ansees}$$

$$\text{som en heel og } 9,0594219 = \text{Log. sin. } 6^\circ 35' 3''$$

$$2) \text{Log. cos.} = 9,9971268 \text{ og } D 1'' = 2,43 \times 3$$

$$= \frac{7}{7,29}$$

$$9,9971261 = \text{Log. cos. } 6^\circ 35' 3''$$

$$3) \text{Log. tang.} = 9,0622403 \text{ og } CD 1'' = 184,68 \times 3$$

$$+ \frac{554}{554,04}$$

$$0,0622957 = \text{Log. tang. } 6^\circ 35' 3''$$

$$4) \text{Log.}$$

4) Log. cot. $\equiv 10,9376597$

554

$$10,9377043 = \log. \cot. 6^{\circ} 35' 3''$$

B) Naar den givne Bue er under 5 eller over 85 Grader.

Opfølg. Man finder disse Grader fra S. 193 til S. 238 saaledes, at Logarithmen for hver Minut og hver tiende Sekund med Differencen for een Sekund ere anførte, og man gaaer her frem paa samme Maade som i første Tilfælde.

Den givne Bue være f. Ex. $1^{\circ} 24' 53''$, og
man finder S. 203

$$\log. \sin. 1^{\circ} 24' 50'' = 8,3022486 \text{ og } D_1'' = 852,2$$

$$2556,6 \times 3$$

2556,6

$$\begin{aligned} \text{og Log. sin. } 1^{\circ} 24' 53'' &= 8,3922486 + 2557 \\ &= 8,3925043. \end{aligned}$$

Till. 1. De fra S. 193 til 202 i den første Wille værende Lat udtrykke Summen af de enkelte Sekunder; saaledes er. $1^{\circ} 12' 50'' = 4370$, som findes S. 202 i den første Wille ved $1^{\circ} 12' 50''$. Hvorledes disse Summer tiene til endnu mere at finde Logarithmerne end ved sidste Opløsning, vil tydelig sees af følgende Exempler:

1) Lad den givne Bue være $1^{\circ} 8' 56''$; man
finder da $\text{C. } 201 \cdot 1^{\circ} 8' 50'' = 4130''$, den givne
Bue

Bue altsaa $\equiv 4136''$. Nu findes i den første Tabel for de almindelige Tal-Logarithmer

$$\text{Log. } 4136 \equiv 3,6165805$$

$$\text{Log. } 4130 \equiv 3,6159501$$

$$\text{Log. Differ.} \equiv 6304,$$

som maae adderes til Logarithmen for Sinus og Tangens, men subtraheres fra Logarithmen for Cotangens; og saaledes bliver

$$a) \text{ Log. sin. } 1^{\circ} 8' 50 \equiv 8,3014959$$

$$+ \quad 6304$$

$$\text{Log. sin. } 1^{\circ} 8' 56'' \equiv 8,3021263$$

$$b) \text{ Log. tang. } 1^{\circ} 8' 50'' \equiv 8,3015830$$

$$+ \quad 6304$$

$$\text{Log. tang. } 1^{\circ} 8' 56'' \equiv 8,3022134$$

$$c) \text{ Log. cot. } 1^{\circ} 8' 50 \equiv 11,4984170$$

$$- \quad 6304$$

$$\text{Log. cot. } 1^{\circ} 8' 56'' \equiv 11,3977866$$

Till. 2. For de fem sidste Grader gielde vel ikke umiddelbar de i første Pille ved venstre Side anførte Sekund-Summer, men dog deres Logarithme, Differencer, som stedse blive de samme for to Buer, der ere hinandens Complementer. For Ex. Buen $88^{\circ} 51' 4''$ være givet.

Ved den næst foregaaende mindre Bue $88^{\circ} 51'$ finder man S. 201 i den første Pille ved venstre

fre Side Sekund-Summen 4140; den givne Bue er 4'' høiere end $88^{\circ} 51'$, dens Complement altsaa 4 Sekunder mindre, eller 4136. Man søger nu Tal-Logarithme-Tabellerne.

$$\text{Log. } 4140 = 3,6170003$$

$$\text{Log. } 4136 = 3,6165805$$

Log. Differ. = 4198, som adderes til Log. tang. $88^{\circ} 51'$, men subtraheres fra Log. cot. og Log. cos. af samme Bue. Saaledes bliver

$$\begin{array}{r} \text{a) Log. tang. } 88^{\circ} 51' 0'' = 11,6973665 \\ \quad \quad \quad + \quad \quad \quad 4198 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Log. tang. } 88^{\circ} 51' 4'' = 11,6977863$$

$$\begin{array}{r} \text{b) Log. cot. } 88^{\circ} 51' 0'' = 8,3026335 \\ \quad \quad \quad - \quad \quad \quad 4198 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Log. cot. } 88^{\circ} 51' 4'' = 8,3022137$$

$$\begin{array}{r} \text{c) Log. cos. } 88^{\circ} 51' 0'' = 8,3025460 \\ \quad \quad \quad - \quad \quad \quad 4198 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Log. cos. } 88^{\circ} 51' 4'' = 8,3021262$$

§. 19.

Opgave. At finde Buen eller Vinklen, der svarer til en given Logarithme for en trigonometrisk Linie.

Opløsn. Her møde to Tilfælde: enten findes den givne Logarithme nøiagtig i Tabellerne, eller ikke. Er det første Tilfældet, da søges den

Anden Deel. Trigonometrie. S lige

ligeftrem i Tabellerne, og de tilhørende Grader findes for oven eller neden efter Colonnens Overskrift, og Minuterne enten i den første eller sidste Pille, saaledes som tilforn er forklaret.

8. Ex. 1) Log. tang. $x = 8,6784573$; denne findes Side 213 i første Pille paa venstre Haand lige for $43' 50''$ og over staaer Siden 2° , altsaa er $x = 2^\circ 43' 50''$. Var derimod den givne Logarithme $8,6784573 = \text{Log. cot. } x$, saa findes Graderne neden for paa samme Side og Minuterne og Secunderne i sidste Pille mod Høire og $x = 87^\circ 16' 10''$.

2) Log. sin. $x = 9,066919$ findes næiagtig Side 239 ud for $42'$, altsaa er $x = 6^\circ 42'$; men var samme Logarithme $9,0669619 = \text{Log. cos. } x$, saa var $x = 83^\circ 18'$.

Finder derimod det andet Tilfælde Sted, at den givne Logarithme ikke næiagtig findes i Tabellerne, da maa man gaae frem paa følgende Maade:

Man søger, som i første Tilfælde, den mindre Logarithme, der nærmer sig meest den givne, tager Differencen mellem den og den givne, og dividerer denne Different med det Tal, som findes lige ved i den med $D 1''$ betegnede Pille; den derved udfomne Quotient viser, hvormange Secunder der maae lægges til eller tages fra (eftersom Buen voxer eller tager.

tager af) den Bue, der hører til den fundne Logarithme, for at den skal svare til den givne.

E. Ex. Lad være givet Log. tang. $x = 8,6785738$ man finder S. 213 den næst mindre.

$$\text{Log. tang. } 2^{\circ} 43' 50'' = 8,6784573$$

$$\text{Difference} \quad 1165$$

I Pilen D'' findes 442,3, hvormed 1165 divideres, Quotienten 2,6'' adderes til $2^{\circ} 43' 50''$, og den Bue x , som hører til den givne Log. tang., er $= 2^{\circ} 43' 52,6''$.

Till. Findes den næste mindre Logarithme fra Side 193 til 202, saa kan man i Stedet for den anførte Oplosning benytte sig af Sekundsummen i første Pile paa følgende Maade:

$$\begin{aligned} \text{E. Ex. Lad være givet Log. sin. } x &= 7,9337679, \text{ saa} \\ \text{findes S. 196 Log. sin. } 0^{\circ} 29' 30'' &= 7,9335428 = \\ \text{Log. sin. } 1770'' \text{ og Logar. Differ.} &= 12251 \text{ som} \\ \text{adderes til Log. } 1770, \text{ der findes} &= 3,2479733 \end{aligned}$$

og man faaer Log. 3,2491984, der i Tabellen findes at svare til Tallet 1775; x er altsaa $= 1775'' = 0^{\circ} 29' 35''$.

§. 20.

Opgave. For enhver given Bue ved Hjælp af de kunstige trigonometriske Linier at bestemme de naturlige.

Oplosn. Man op søger i Tabel II den Veen tilhørende Logarithme (§. 17 og 18), reducerer den, ved at formindske Riendetaillet med 10, at den passer til Radius 1, og op søger i de simple Tal-Logarithmer (Tab. I) det dertil svarende Tal.

Ex. Man forlanger $\sin. 13^{\circ} 30'$, saa findes i Tab. II Log. $\sin. 13^{\circ} 30' = 9,3861843$ og reduceret til $r = 1$, Log. $\sin. 13^{\circ} 30' = 0,3681851 - 1$, og hertil findes i Tab. I af svare Tallet 0,2334454, der altsaa er $\sin. 13^{\circ} 30'$, naar Radius antages $= 1$.

III. Om plane Trianglers trigonometriske Beregning.

A. Om de retvinklede Triangler.

§. 21.

Op g a v e. Naar i en retvinklet Triangel ACB (Fig. LIX), Hypothenusen CB , og den ene Cathet CA ere givne, at finde de øvrige Stykker.

Oplosn. Bruges CB som Radius, saa er $CA = \sin. CBA$, og man har (§. 8) $CB : CA = r : \sin. CBA$ og $\sin. CBA = \frac{r \times CA}{CB}$

og da Vinklen $BCA = 90^\circ - CBA$, saa er
 $\sin. CBA = \cos. BCA$, følgelig $\cos. BCA =$
 $\frac{r \times CA}{CB}$. Bruges nu, som almindeligt er vedta-

get, Logarithmerne (de konstige trigonometriske
 Linier), saa er $\log. \sin. CBA = \log. r +$
 $\log. CA - \log. CB$.

B. Ex. Lad $CB = 5$, $CA = 4$, saa er

$$\log. r + \log. 4 = 10,6020600$$

$$- \log. 5 = \underline{0,6989700}$$

$$\log. \sin. CBA = 9,9030900, \text{ som}$$

opført i Tab. II (§. 19) giver Buen eller Vinklen
 $53^\circ 7' 48''$; deraf findes Vinklen $BCA = 36^\circ$
 $52' 12''$.

Den Side i Trianglen BA (der ellers let
 findes efter Geom. §. 37) kan ogsaa findes ved
 følgende Proportion:

$$r : \sin. BCA = CB : BA \text{ og}$$

$$BA = \frac{CB \times \sin. BCA}{r} \text{ og } \log. BA$$

$$= \log. CB + \log. \sin. BCA - \log. r.$$

$$\log. 5 = 0,6988343$$

$$\log. \sin. 36^\circ 52' 12'' = \underline{9,7782870}$$

$$\log. 5 + \log. \sin. 36^\circ 52' 12'' = 10,4771213$$

$$\log. r = \underline{10,0000000}$$

$$\text{og } \log. BA = 0,4771213,$$

som henviser til Tallet 3.

§. 22.

§. 22.

Opgave. I Triangelen KGB (Fig. LIX) at finde de øvrige Stykker naar Siderne KG og KB ere givne.

Oplosn. Antages BK til Radius, bliver KG Tangent for Vinklen B , og man har følgende Proportion: $BK : KG = r : \text{tang. } B$ (§. 8)
 5: Radius i Figuren til Tangenten for B i Figuren som Radius i Tabellerne til Tangenten for B

i Tabellerne, og $\text{tang. } B = \frac{KG \times r}{BK}$, folgelig

$\text{Log. tang. } B = \text{Log. } KG + \text{Log. } r - \text{Log. } BK$.

Sættes nu som i forrige Exempel $KG = 4$ og

$BK = 3$, saa er $\text{Log. tang. } B = \text{Log. } 4 +$

$10,0000000 - \text{Log. } 3 = \text{Log. tang. } 53^\circ 7'$

$48''$.

Anm. Af denne Oplosning sees, at naar Vinklen $B = 45^\circ = \frac{1}{2}R$, da er $r(BK) = \text{tang. } B (GK)$, hvoraf følger, at saalange en Vinkel er mindre end 45° , er Tangenten mindre end Radius; men er Vinkelen over 45° er den større, indtil den for 90° bliver uendelig stor.

Lill. 1. Vinklen G findes ved at subtrahere B fra 90° , altsaa her $G = 36^\circ 52' 12''$, eller og ved at antage KG for Radius, da KB bliver Tangent for Vinklen G , og saaledes $KG : KB$

$= r : \text{tang. } G$ og $\text{tang. } G = \frac{KB \times r}{KG}$.

Lill.

Till. 2. Hypothenusen BG bliver, naar BK er Radius, Secans for Vinklen B , og kunde ogsaa findes ved følgende Proportion: $r : \sec. B = BK : BG$ og $BG = \frac{\sec. B \times BK}{r}$; men da i

de fleste Haand-Udgaver af Tabeller ingen Sekanter eller deres Logarithmer findes beregnede; pleier man ogsaa at søge den saaledes: $\sin. B : \sin. K (= \sin. \text{tot.} = r) = BK : BG$ og $BG = \frac{BK \times r}{\sin. B}$.

Anm. Hypothenusen GB kan desuden, naar Katheterne ere bekendte, findes efter Geometrien §. 37.

§. 23.

Opgave. Naar i Trianglen ACB (Fig. LIX) Hypothenusen CB og en spids Vinkel B ere bekendte, at finde de øvrige Stykker.

Oplosn. Den anden spidse Vinkel ved C findes let ved at subtrahere B 's Grader fra 90° (Geom. §. 29. Till. 4), og Siderne AC og AB let saaledes: $r (\sin. \text{tot.}) : \sin. B = BC : AC$ og $AC = \frac{\sin. B \times BC}{r}$; ligeledes $r (\sin. \text{tot.}) : \cos. B = BC : AB$ og $AB = \frac{\cos. B \times BC}{r}$. Rigtig-

heden af denne Oplosning indsees af §. 8 og §. 21.

§. 24.

Opgave. Naar i den retvinklede Triangel GKB (Fig. LIX) den ene Cathete BK og den spidse Vinkel ved B er bekiendt, at finde de øvrige Sider og den anden spidse Vinkel.

Oploen. Vinklen $BGK = 90^\circ - B$ (Geom. §. 29. Till.); tages nu som før (§. 22) BK til Radius, saa er r (sin. tot.) : tang. $B =$

$$KB : KG \text{ og } KG = \frac{KB \times \text{tang. } B}{r}. \text{ Fremde-}$$

$$\text{les } \cos. B : r = BK : BG \text{ og } BG = \frac{r \times BK}{\cos. B}$$

Anm. 1. Det sees let, at det er ligegyldigt, hvilken af de spidse Vinkler der er givet, da den anden derved tillige er bekiendt, og Oploenningen altsaa den samme.

Anm. 2. I Stedet for Proportionen $r : \text{tang. } B = KB : BG$ kunde man (hvis man ikke i Tabellerne havde Tangenterne og deres Logarithmer) ogsaa bruge denne: $\cos. B : \sin. B = BK : KG$ (§. 8 og §. 21); men hvor det er mueligt, bruger man helst den Proportion, hvori Radius eller sinus totus forekommer, da det gior Regningen lettere med Tal og Logarithmer.

Ligesaa kunde i Stedet for Proportionen $\cos. B : r = BK : BG$ været sat: $r : \sec. B = BK : BG$; men Secanterne findes kun i saa Tabeller, og deres Logarithmer endnu i færre.

Till.

Till. Exempler til Øvelse i det her Fore-
 dragne om retvinklede Trianglers trigonometriske
 Beregning kan beqvemt tages af Astronomien; som
 af Solens og Maanens horizontale Paralaxis og
 Jordflodens Radius at beregne disse Himmellege-
 mers Afstand fra Jordens Centrum, og deraf
 igien og af deres tilsyneladende Størrelse at bereg-
 ne deres virkelige Diametre.

§. 25.

Opgave. Ved Hielp af den retvinklede Tri-
 angel og de naturlige Tabeller nøiagtigt
 at udmaale en Vinkel.

Oplosn. Den givne Vinkel, der skal maa-
 les, være MAO (Fig. LX); efter en formindsket
 Maalestof affætter man $AG = 1000$, fælder den
 lodrette Linie GH , da saaledes GH er sin. MAO
 og $AH = \cos. MAO$. Nu maaler man efter
 samme Maalestof enten GH eller AH , og opso-
 ger i Tabellerne efter en Radius $= 1000$ de for
 GH eller AH fundne Tal, saa findes derved Vink-
 len i Grader og Minuter.

Anm. Da Sinustavlerne ere beregnede almin-
 delig efter en Radius $= 10,000000$, maae man,
 for at de i Tabellerne fundne Sinuser skal svare til
 $r = 1000$, af enhver bortkaste de fire sidste Cifre
 mod Høire og kun beholde de tre første; men da Ta-
 bel:

sellerne vilse, at de tre høieste Lipse af en Sinus blive for flere efter hinanden følgende Minuter de samme, og at kun de ringeste forandres; fremdeles at til ligestore Forandringer af Buer Forandringerne i Sinuserne er stedse mindre og mindre jo mere Buerne nærme sig 90° , saa at Forskiellen imellem Sinuser for 80 og 81 Grader ikke er saa stor som mellem Sinuser for 10 og 11 Grader, saa faaer man ved denne Maaling ikke Vinklen fuldkommen nøiagtig, men dog i smaae Vinkler paa 4 til 5 Minuter nær, og altsaa meget nøiagtigere end ved de sædvanlige Transporteurer. Ved større Vinkler kan Feilen være til mod 15 Minuter; men for at undgaae dette bruger man da Cosinus som er Sinus for den mindre Vinkel, og faaer den altsaa mere nøiagtig.

Ex. Sæt man fandt $GH = 939$, saa maatte Vinklen falde imellem $69^\circ 53'$ og $70^\circ 3'$; man maaler da i den Sted Linien AH , som vil være 342 og Vinklen $HGA = ONA$ vil da falde imellem 20° og $20^\circ 3'$, altsaa Vinklen A imellem 70° og $69^\circ 57'$.

B. Om skævvinklede Trianglers Beregning.

§. 26.

Læres. I enhver skævvinklet Triangel forholde Siderne sig til hinanden som Sinuserne af de modstaaende Vinkler.

Bevijs. 1) Trianglen være spidsvinklet CAB (Fig. LII), BA antages som Radius, og fra Vinkel

hjørte A og B beskrives Buer, og fra samme Punkter sælles de lodrette Linier AH og BG , AH bliver sin. B og BG sin. A . Trianglerne CGB og CAH ere ligedanne (Geom. §. 68), altsaa $CB : BG = CA : AH$, og ved at ombytte de mellemste Led $CB : CA = BG : AH$, d. e. $CB : CA = \sin. A : \sin. B$.

2) Triangelen være stumpvinklet ABC (Fig. LI); med AC som Radius beskrives da fra A og C Cirkelbuer, og sælles paa de forlængede Linier CB og AB de lodrette Linier CI og AH , da $CI = \sin. A$ og $AH = \sin. C$. Nu er $\triangle BCI \sim \triangle ABH$, følgelig $BC : CI = BA : AH$ og $BC : CA = CI : AH$ d. e. $BC : CA = \sin. A : \sin. C$.

Anm. Paa denne Føreførelse (der ogsaa kan anvendes paa retvinklede Triangler, og hvorfor er ført et almindeligt Beviis §. 9) grunder sig den trigonometriske Opløsning af alle Arter af Triangler (§. 1), som giver en langt større Nøiagtighed end ved geometrisk Tegning kan erholdes, og kan tillige anvendes paa alle retlinede Figurer der lade sig dele i Triangler. Da imellem de tre givne Ting, der bestemme en Triangels Størrelse, nødvendig maae være en Side, saa forekomme fire forskellige Opgaver; der kan nemlig være givet 1) een Side og to Vinkler, 2) to Sider og een modstaaende

Win

Vinkel, 3) to Sider og een mellemliggende Vinkel,
4) alle tre Sider.

§. 27.

Opgave. I Trianglen BAC (Fig. LVII),
naar Siden BC og Vinklerne ved B og C
ere givne, at finde de øvrige Stykker.

Oploesn. Da den tredie Vinkel i en Triangel
altid vides af de to givne, saa er det ligegyldigt,
hvilken Side der er givet, og man har

$$\left. \begin{array}{l} \sin. A : \sin. B = BC : AC \\ \sin. A : \sin. C = BC : AB \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Bed disse Proportioner} \\ \text{findes de ubekjendte Sti-} \\ \text{der } AC \text{ og } AB. \end{array}$$

§. Ex. Antag $BC = 329,76'$, Vinklen $C = 20^\circ 12'$, $B = 34^\circ 18'$, følgelig $C = 180^\circ - (34^\circ 18' + 20^\circ 12') = 125^\circ 30'$, og saaledes $\sin. 125^\circ 30'$ (der efter det i Forveien forklarede er $= \sin. 54^\circ 30'$) : $\sin. 34^\circ 18' = 329,76 : AC$

$$\text{og Log. } 329,76 = 2,5181980$$

$$\text{Log. sin. } 34^\circ 18' = 9,7509140$$

$$\hline 12,2691120$$

$$\text{Log. sin. } 54^\circ 30' = 9,9106860$$

$$\text{Log. } AC = 2,3584260, \text{ som giver}$$

$$AC = 228,258'.$$

$$\text{Fremdeles } \sin. 54^\circ 30' : \sin. 20^\circ 12' = 329,76 : AB$$

$$\text{og Log. sin. } 20^{\circ} 12' = 9,5381943$$

$$\text{Log. } 329,76 = 2,5181980$$

$$\hline 12,0563923$$

$$\text{Log. sin. } 54^{\circ} 30' = 9,7106869$$

$$\text{Log. } AB = 2,1457063, \text{ som giver}$$

$$AB = 139,864'.$$

Anm. At sin. $125^{\circ} 30'$ er det samme som sin. $54^{\circ} 30'$, er klart af det i Forveien forklarede (§. 3. Till. 2).

§. 28.

Opgave. Naar i Trianglen BAC (Fig. LV) de to Sider AB , AC og den modstaaende Vinkel B ere givne, at finde de øvrige Stykker.

Opløsn. Først findes Vinklen C , da vi have (§. 26) $AC : AB = \sin. B : \sin. C$. Sætte vi nu $AC = 139,864'$, $AB = 228,258'$, og $B = 20^{\circ} 12'$, saa er

$$\text{Log. } 228,258 = 2,3584260$$

$$\text{Log. sin. } 20^{\circ} 12' = 9,5381943$$

$$\hline 11,8966203$$

$$\text{Log. } 139,864 = 2,1457060$$

$$\text{Log. sin. } C = 9,7409143, \text{ som giver}$$

$$\text{Vinklen } C = 34^{\circ} 18'.$$

Vinf.

Vinklen B var givet: er nu C fundet, saa har man Vinklen A og kan finde Siden BC (§ 27).

Anm. Den fundne Lin. C passer (naar C ikke er en ret Vinkel) baade til en spids Vinkel $= 34^{\circ} 18'$ og til en stump $= 145^{\circ} 42'$. I Henseende til denne Tvetydighed maae følgende mærkes:

1) Er den givne Vinkel B en ret eller stump Vinkel, da maae C nødvendig være spids (Geometrie §. 18. Till. 3).

2) Er Vinklen B spids og den B lige over liggende Side AC større end den høiliggende AB , saa maae ogsaa C være spids, da ellers AB skulde være større end AC mod Forudsætningen (Geom. §. 22).

3) Er Vinklen B spids, men AC mindre end AB , saa bliver det tvetydigt, da Lin. C kan passe saavel til en stump som til en spids Vinkel, naar man ikke af andre Grunde forud veed, om C skal være spids eller stump.

§. 29.

Opgave. Naar i en Triangel BAC (Fig. LVII) de to Sider BA , BC og den indskrevte Vinkel B ere givne, at finde de øvrige Stykker.

Oplosn. Man seer let, at den almindelige Sætning om Trianglers Beregning (§. 26) ikke umiddelbar her kan anvendes, da man derefter ingen Proportion kunde faae, hvori der var meer end to bekiendte

bekjendte Størrelser, og altsaa ikke nok til at finde de ubekjendte; man maae derfor fælde en lodret Linie AD , hvorved man faaer to retvinklede Triangler BAD , og ADC , i BAD er Siden BA , Vinklen B og den rette Vinkel ved D givet; den beregnes altsaa efter §. 21, og siden ADC efter §. 23.

Anm. Foruden denne Opløsning gives en anden, der bygges paa følgende Løresætning.

§. 30.

Løres. I enhver Triangel ABC (Fig. LVI) forholde Summen af de to Sider ($BC + AB$) sig til Differencen af de samme to Sider ($BC - AB$) som Tangenten til de Siderne modstaaende Vinklers halve Sum [tang. $\frac{1}{2}(BAC + ACB)$] til Tangenten af de samme Vinklers halve Difference [tang. $\frac{1}{2}(BAC - ACB)$].

Beviis. Den kortere Side BA affættes paa den længere BC , saa at $BE = BA$; BC forlænges mod D , saa at $BD = BE = BA$; derpaa trækkes DA og AE . I $\triangle BAC$ er Vinklerne $BAC + ACB = 2R - ABC$; i $\triangle BAE$ ere Vinklerne $BAE + AEB = 2R - ABC$ (Geomet. §. 29. Till. 1), folgelig Vinklerne $BAC + ACB = BAE + AEB$, men $\angle BAE =$
 $\angle AEB$

$\angle AEB$ (Geom. §. 13 Till. 1), altsaa $\angle BAC + \angle ACB = 2 \angle BAE = 2 \angle AEB$ og $\frac{1}{2}(BAC + ACB) = \angle AEB = \angle BAE$. Men er $\angle BAE = \frac{1}{2}(BAC + ACB)$, saa er $\angle EAC = \frac{1}{2}(BAC - ACB)$. (See Algebra §. 31).

Igiennem C trækkes videre Linien $CF \neq AE$, og DA forlænges til den skærer CF .

Nu er Vinklen $DAE = R$ (Geom. §. 44 Till. 3). men $DAE = DFC$, altsaa $DFC = R$; Vinklen $EAC = ACF$ (Geom. §. 28), altsaa $ACF = \frac{1}{2}(BAC - ACB)$. Antages nu C som Centrum, hvorfra med Radius CF blev beskrevet Buer til Maal for Vinklerne BCF og ACF , saa bliver $DF = \text{tang. } BCF$ og $AF = \text{tang. } ACF$ (§. 4). Men $\angle BCF = \angle BEA$ (Geom. §. 28) $= \frac{1}{2}(BAC + ACB)$ ∴ den halve Summa af de modstaaende Vinkler og $\angle ACF = \frac{1}{2}(BAC - ACB)$ ∴ den halve Difference af de samme Vinkler; følgelig $DF = \text{tang. } \frac{1}{2}(BAC + ACB)$ og $AE = \text{tang. } \frac{1}{2}(BAC - ACB)$. Endelig er (Geom. §. 60) $DC : EC = DF : AF$, men $DC = (AB + BC)$ ved Tegning; og $EC = (BC - BA)$, altsaa $BC + AB : BC - AB = \text{tang. } \frac{1}{2}(BAC + ACB) : \text{tang. } \frac{1}{2}(BAC - ACB)$ ∴ Summen af de to

Sider

Giver i en Triangel til deres Difference, som Tangenten af de modstaaende Vinklers halve Summa til Tangenten af deres halve Difference.

Lill. Antage vi nu, som §. 29, BC og BA og den indsluttede Vinkel ABC betiendte, saa er ogsaa $\frac{1}{2}(BAC + ACB)$ betiendt (Geometr. §. 29), og vi søge allene $\frac{1}{2}(BAC - ACB)$, som findes ved den nylig beviiste Proportion.

Sæt til Exempel (Fig. LV) $BC = 329,760'$, $BA = 228,258$, og Vinklen $B = 20^\circ 12'$, saa er $BC + AB = 558,018'$, $BC - BA = 101,502'$. Vinklerne $A + C$ ere $= 180^\circ - 20^\circ 12' = 159^\circ 48'$, altsaa $\frac{1}{2}(A + C) = 79^\circ 54'$, og vi finde altsaa $\frac{1}{2}(A - C)$ ved den nylig beviiste Proportion saaledes

$$558,018 : 101,502 = \text{tang. } 79^\circ 54' : \text{tang. } \frac{1}{2}(A - C)$$

$$\text{Log. tang. } 79^\circ 54' = 10,7492699$$

$$\text{Log. } 101,502' = 2,0063746$$

$$12,7557445$$

$$\text{Log. } 558,018' = 2,7466482$$

$$\text{Log. tang. } \frac{1}{2}(A - C) = 10,0090993, \text{ som giver}$$

$$\frac{1}{2}(A - C) = 45^\circ 36'. \text{ Men nu er (Algebr.}$$

$$\S. 32) \text{ Vinklen } A = \frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}(A - C)$$

$$\text{altsaa} = 79^\circ 54' + 45^\circ 36' = 125^\circ 30' \text{ og}$$

$$C = \frac{1}{2}(A + C) - \frac{1}{2}(A - C), \text{ altsaa} = 79^\circ$$

$$54' - 45^\circ 36' = 34^\circ 18'.$$

At de fundne Vinkler findes Siden AC efter §. 27 eller §. 28.

§. 31.

Opgave. Naar i en Triangel ACB (Fig. LVIII) alle tre Sider ere givne, at finde Vinklerne.

Oplosn. Ved Anvendelsen af den (§. 26) beviste Sætning kan her de ubekendte Stykker ikke findes, da man derved ikke kan erholde nogen Proportion hvori der ere tre bekendte Størrelser; man maae altsaa for at faae de nødvendige bekendte Størrelser (data) foretage følgende Construction: -

Fra Vinkelspidsen C (den største Vinkel) sæl- des en lodret Linie CI paa den modsatte Side AB , derved deles Trianglen ACB i to retvinklede Triangler ACI og ICB . Betragt vi nu først den retvinklede Triangel ACI , saa ere deri Si- den AC og Vinklen ved $I = R$ bekendte; men vi maae efter det forhen forklarede endnu have en- ten en Side eller en Vinkel bekendt. Vi foretager derfor følgende Construction for at finde Siden AI .

Fra Vinkelspidsen C (den Vinkel, hvorfra den lodrette Linie blev sæl- det) beskrives med Radius CA en Cirkel, og Linien BC forlænges til D .

Nu

Man er (Geomet. §. 73) $AB : DB = EB : FB$,
 men $DB = CB + CA$ og $EB = CB - CA$,
 altsaa $AB : CB + CA = CB - CA : FB$.

I denne Proportion, hvor de tre første Led ere givne,
 kan vi regne os til Linien FB ; er denne funden,
 da er $AF = AB - FB$ og $AI = \frac{1}{2}AF$ be-
 kiendte. Er paa denne Maade Linien AI funden,
 da findes i den retvinklede Triangel ACI de ube-
 kiendte Stykker efter §. 21, og siden de øvrige
 Dele i ΔACB efter §. 29.

Sæt for Exempel $AB = 329,760'$, $CB =$
 $228,258'$, og $AC = 139,864'$, saa er efter
 den bevilste Proportion $329,768' : 368,122' =$
 $88,394' : FB$

$$\text{og Log. } 88,394 = 1,9464228$$

$$\text{Log. } 368,122 = 2,5659917$$

$$\hline 4,5124146$$

$$\text{Log. } 329,760 = 2,5181980$$

Log. $FB = 1,9942166$, som giver
 $FB = 98,67717$. De øvrige Stykker findes nu
 let paa den forklarede Maade.

IV. Trigonometriens Anvendelse paa Cirkler og regulaire Polygoner.

§. 32.

Opgave. Af en given Radius og Chorde at finde den tilhørende Vinkel ved Middelpunktet, og af Vinklen ved Middelpunktet og Chorden at finde Radius.

Oplosn. Lad Radius være CG (Fig. XLVII) $= r$, og Vinklen GCE en Vinkel ved Middelpunktet $= a$, saa er den Vinkel a tilhørende Chorde EG (som vi vil sætte $= b$) $= 2r \times \sin. \frac{1}{2}a$ (§. 10), da $\triangle GCE$ er ligebenet. Da enhver Chorde kan ansees som Siden i en regulair Polygon, saa findes ved den Form ogsaa Siden til en regulair Polygon af n Sider, naar Radius af den omskrevne Cirkel $= r$, hvis Centervinkel $= a = \frac{360^\circ}{n}$ (Geom. §. 54. Till. 1).

Var $b = 2r \times \sin. \frac{1}{2}a$, saa er $\sin. \frac{1}{2}a = \frac{b}{2r}$ og $r = \frac{b}{2 \sin. \frac{1}{2}a}$; og saaledes kan, naar af de tre Ting, Chorde b , Centervinkel a og Radius r , de to ere givne, stedse den tredje findes.

De i Geometrien (§. 53) forekommende Problemer ere saaledes her almindelig opløste.

Exill. 1. Sætte vi $FB = l$ og ansee den som Siden i en om en Cirkel, hvis Radius er r , beskrevet Polygon, saa er l den dobbelte Tangent til den halve Centervinkel; kalde vi den i Tabel-
lerne brugte Radius ρ , saa er $l = \frac{2r \times \text{tang. } \frac{1}{2}a}{\rho}$

Bemærk: da $\sin. \frac{1}{2}a : \text{tang. } \frac{1}{2}a = b : l$ (§. 8)
og da $\text{tang. } \frac{1}{2}a = \frac{\sin. \frac{1}{2}a}{\cos. \frac{1}{2}a}$, saa er $\sin. \frac{1}{2}a : \frac{\sin. \frac{1}{2}a}{\cos. \frac{1}{2}a}$

$= b : l$: $1 : \frac{1}{\cos. \frac{1}{2}a} = b : l$, men $\sec. \frac{1}{2}a =$

$\frac{1}{\cos. \frac{1}{2}a}$ (§. 7), følgelig $1 : \sec. \frac{1}{2}a = b : l$ og

$l = b \times \sec. \frac{1}{2}a = \frac{b \times \sec. \text{tab. } \frac{1}{2}a}{\rho}$

Exill. 2. Heraf lader sig udvikle en Methode, hvorved med en høj Grad af Nøjagtighed kan findes en Cirkels Peripherie eller Omkreds. Man beregner nemlig efter den her forklarede Maade Omfanget af en indskreven eller omskreven Polygon af over, maade mange Sider. Man sætter til Exempel $\frac{1}{2}a = \frac{1}{8192} R$ (af en ret Vinkel). saa er $a = \frac{1}{4096}$ og Siden af en indvendig Polygon med

$16384 \text{ Sider} = b = 2r \times \sin. \frac{1}{2}a = 2 \sin. \frac{1}{2}a = 0,0003834959146$. Dette Tal multipliceret med 8192 (Sidernes halve Antal) giver den halve Omkreds af en saadan indskreven Polygon $= 3,1415926241532$.

Nu er (Till. 1) l (Siden i den omskrevne Polygon af samme Side-antal) $= b \times \sin. \frac{1}{2}a$, men da

$$\sin. \frac{1}{2}a = \frac{1}{\cos. \frac{1}{2}a}, \text{ saa er } \sin. \frac{1}{8192} R =$$

$$\frac{1}{0,99999981616429380} \text{ og } 8192 \times b \times \sin. \frac{1}{8192} R$$

$$= 3,1415926918922 = \text{den halve Omkreds af en omskrevet Polygon, hvis Centervinkel er } \frac{1}{4096} R.$$

Imellem begge disse Størrelser (Omkredsen af den indskrevne og omskrevne Polygon) ligger Peripherien af en Cirkel, hvis Diameter $\delta = 1$, da $\frac{1}{2}\pi : \frac{1}{2}\pi = \delta : \pi$.

Anm. De her nævnte $\sin. \frac{1}{8192} R$ og $\cos. \frac{1}{8192} R$ ere, for at undgaae unødvendig Vidskæftighed, vel ikke her i det foregaaende beregnede, men vil let kunde findes efter §. 13 Anm. 1 og §. 7.

§. 33.

Opgave. At beregne Indholdet P af en i en Cirkel, hvis Radius er r , beskrevet Polygon,

lygon, naar Centervinklen er $= a$ og Sidernes Antal $= n$.

Oplosn. og Beviis. Lad AB (Fig. LIII) være en af Polygonens Sider, saa er $\rho : \sin. \text{tab. } a = r : BD$ og $BD = \frac{r \times \sin. \text{tab. } a}{\rho}$. Nu er

(Geom. §§. 98 og 100. Till. 1) $P = \frac{BD \times AC}{2}$

$\times n$, men $AC = r$, følgelig $P = \frac{r \times \sin. \text{tab. } a \times r}{2\rho} \times n = \frac{nr^2 \times \sin. \text{tab. } a}{2\rho}$.

Till. 1. Tænk vi os en anden Polygon Π , hvis Side-antal er N og hvis Centervinkel A , saa er $P : \Pi = \frac{nr^2 \times \sin. \text{tab. } a}{2\rho} : \frac{Nr^2 \times \sin. \text{tab. } A}{2\rho}$

$= n \times \sin. \text{tab. } a : N \times \sin. \text{tab. } A$. Var nu

$n = 4$ og $N = 12$, saa er $a = 90^\circ$ og $A = 30^\circ$, og altsaa $\sin. \text{tab. } A = \frac{1}{2} \sin. \text{tab. } a$

(§. 7. Till. 3); følgelig $P : \Pi = 4 : 12 \times \frac{1}{2} =$

$4 : 6 = 2 : 3$. d. e. Fladen af en regulair ind-

skrevet Firkant er $\frac{2}{3}$ af en i samme Cirkel indskre-

vet regulair Tolvkant.

Till. 2. Antag vi en anden Polygon at have dobbelt saa mange Sider som den første, altsaa

faa $N \equiv 2n$, og følgelig $2A \equiv a$, faa er $P :$
 $\Pi \equiv n \times \sin. \text{tab. } 2A : 2n \times \sin. \text{tab. } A \equiv$
 $n \times \sin. 2A : 2n \times \sin. A$. Fremdeles er $\sin.$
 $2A \equiv 2 \sin. A \times \cos. A$ (§. 11), følgelig $P :$
 $\Pi \equiv 2n \times \sin. A \times \cos. A : 2n \times \sin. A$
 $\equiv \cos. A : 1$. Naar altsaa $A \equiv 60^\circ$, $a \equiv$
 120° , faa er $\cos. A \equiv \sin. 30^\circ \equiv \frac{1}{2}$, og faa-
 ledes $P : \Pi \equiv \frac{1}{2} : 1$. d. e. En regulair Triang-
 gel er det halve af en i samme Cirkel indskrevet
 regulair Sextant.

Praktiſch Geometrie

eller

Landmaaling.

Ikke nogen udførlig Afhandling om den egentlige Landmaaling (der forudsætter mange Kundskaber af Optik, Mechanik og Naturlæren) maae man her vente, hvilket heller ikke er overensstemmende med Bogens Hensigt, men kun en kort og ved nogle Exempler opløst Anviisning til praktisk at anvende noget af de hidtil foredragne saavel geometriske som trigonometriske Sætninger.

Anm. Fuldstændig Underretning om praktisk Landmaaling findes i Hr. Justitsraad Bugges mathematiske Forelæsninger, 1ste Deel; desuden og i den af Hr. Justitsraaden udgivne Beskrivelse om den Opmaalingsmethode, der er brugt ved de geographiske Korters Forfærdigelse &c.

§. I.

Forkl. 1) Ethvert frithængende tungt Legeme (som et Blødelod i en Snor) antager en Retning, som kaldes en Vertikal-Linie. En Flade, hvorpaa en saadan Linie er lodret, kaldes horisontal (vandret), som Overfladen af stillestaaende Van-

Bande. En Glades horizontale Stilling undersøges og bestemmes ved det saakaldte **Waterpas**, hvortil almindelig bruges et Glasrør, anbragt paa en Linial, fyldt med et Fluidum, hvori der er en Luftblære. Lægges nu Linialen paa en Glade, som er fuldkommen horizontal, da staaer Luftblæren i Midten af Fluidummet; i modsat Tilfælde gaar Luftblæren til den Ende som ligger høiest, af den physiske Grund, at Luft er lettere end ethvert draabbaart flydende Legeme.

2) Linier gøres synlige paa Marken ved Hjælp af Afstifningsstøkke, som sættes vertikale paa Jordens Overflade, der antages horizontal; og naar de sættes saaledes, at de dække hinanden, da antages de at udgiøre en ret Linie, eller egentlig at ligge alle i en Plan, der staaer lodret paa den horizontale Glade. At afstikke en ret Linie er altsaa at oprette en saadan vertikal Glade; og at finde Længden af denne Glade er at maale den rette Linie. En saadan afstuffed ret Linie udmaales ved Hjælp af Maalekieden. (som er en af forte Læed ved Ringe sammensat Jernkiede, der almindelig er 50 Fod lang) eller ved Støkke.

3) Vinkler udmaales enten ved Snor eller Kiede eller ved Maalebordet og Astrolabium. Ved Maalebordet faaer man Vinklen aflagt umiddelbar;

Delbar; ved Astrolabium derimod findes dens Størrelse i Grader, hvorefter den igien kan overføres paa Papiret eller Kortet ved Transporteuren.

Anm. En udførlig Beskrivelse af disse Instrumenter, saavelsom og af den dertil nødvendige Diop-ter, Lineal og Anvisning til deres Brug troer jeg her ikke passende, da den dog ikke let vilde kunde forstaaes, uden at Instrumenterne kan forevises, hvilke desuden enhver maae ved Udøvelsen have ved Haanden. De Læsere, der ønske en saadan Beskrivelse, finder den saavel i de allerede nævnte Bøger, som og i Majers gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie. Göttingen 1791:1795.

§. 2.

Opgave. Imellem to Punkter *A* og *B* (Fig. LXV) paa Marken at afstikke en ret Linie og vilkaarlig at forlænge den.

Oplosn. I *A* og *B* sættes lodrette Stokke *AE* og *BF*; i en ubestemt Afstand fra *A* sættes Stokken *CD*, der rettes saalænge, indtil alle tre Stokkene, naar Landmaaleren stiller sig noget bag *AE*, dække hinanden; de ere da alle tre i samme vertikale Blade og udgiøre en ret Linie. For at forlænge denne Linie ud paa den anden Side af *B*, stiller Landmaaleren sig noget bag Stokken *CD* og lader ved hans Medhjælper sætte en fjerde Stok paa

paa den anden Side af B , der rettes saalænge indtil Støffene CD , BF og den sidst satte ligge i samme Flade eller udgiøre en ret Linie.

Ell. 1. Ere Punkterne A og B saaledes beliggende, at man ikke kan see fra det ene til det andet, saa indfattes i et Punkt K , hvorfra man kan see baade A og B , en tredje Stof, der efter Hiemaal gjør en ret Linie med A og B . Derpaa sættes en Stof i M saaledes, at AMK er en ret Linie, og i N , saa at KNB er en ret Linie. Er nu ogsaa MKN en ret Linie, saa er alle fem Støffene i en ret Linie; er derimod MKN ikke i en ret Linie, da rettes Støffene KMN saalænge til de udgiøre en ret Linie.

Ell. 2. Laag imellem A og B en Basse, som Fig. LXII, da sættes paa Toppèn af Bassen i Punktet C , hvorfra man kan see baade A og B , en Stof Cc . Nu affikkes paa den forhen lærte Maade en Linie fra A til C , med den Forskiel, at Støffen Aa maae gøres længere, og at man sigter fra a til Punktet D (Boden af Støffen Dd) og fra d til C (Boden af Støffen Cc); dernæst affikkes paa samme Maade en Linie fra C til B .

Anm. Ved Udmaalinger af en saadan Linie sees let, at Kleden strammes fra a til D , derpaa fra d til C , og saaledes paa den anden Side til e , og fra

fra E til b ; disse sammenlagte Længder give da Linien AB .

§. 3.

Opgave. At affætte ved Hielp af en Maale-
snor eller Riede en Vinkel paa Marken lige-
stor med en given Vinkel.

Oplosn. Paa Benene af den givne Vinkel BAC (Fig. LXVIII) affætter man af vilkaarlig Længde Ab , Ac , og maaler Linien bc . Skulde nu denne Vinkel affættes ved C paa Linien CD (Fig. LXIII), saa affætter man fra C en Linie Cd saa stor som Ab og afmaaler paa Snoren en Længde $= Ac + bc$, og ved en Stok strammer den afmaalte Snor over Cd , saaledes at Ce bliver $= Ac$ og $ed = bc$.

§. 4.

Opgave. At finde en Afstand imellem to
Stæder A og B (Fig. LXVII) paa Marken,
som man ikke umiddelbar kan maale.

1ste Tilfælde. Naar man fra et vilkaarligt antaget Standpunkt C kan maale til begge Endepunkter af Afstanden α : til A og B .

Man maaler da CA og CB , forlænger disse Linier paa den modsatte Side af C , og gior $Ca = CA$,
 CB ,

$CA, Cb \equiv CB$, saa er $ab \equiv AB$ (Geom. §. 12).

2det Tilfælde. Naar man fra det antagne Standpunkt C kan komme til A , men ikke til B .

Man maaler da CA og forlænger den, samt affætter $Ca \equiv CA$, og ved a en Vinkel $Cab \equiv CAB$ (§. 3). Nu affikkes fra C en Linie mod B , der forlænges i den modsatte Retning indtil den skjærer den forlængede ab i b , og nu er $ab \equiv AB$ (Geom. §. 15).

3die Tilfælde. Naar man fra C hverken kan komme til A eller B .

Man affikter fra C Linier mod A og B , der forlænges til den modsatte Side; derpaa vælges et Standpunkt, hvorfra man kan komme til C og finde Afstanden AC , og paa samme Maade CB (2det Tilfælde). Disse affættes nu paa de forlængede Linier, nemlig $Ca \equiv CA$ og $Cb \equiv CB$, og da bliver $ab \equiv AB$.

Till. 1. Ere der Hindringer, som forbyde at affatte de hele Linier paa den modsatte Side af C , da kan man affatte proportionale Stykker af dem begge; f. Ex. $Cd \equiv \frac{1}{2} CA$ og $Ce \equiv \frac{1}{2} CB$, ed bliver $\equiv \frac{1}{2} AB$. Man kunde og paa Linierne selv, uden at forlænge dem mod den anden Side, affatte disse Stykker som CE og CD , da
 DE

DE ligeledes er $\equiv \frac{1}{2}AB$. Ved andet og tredje Tilfælde finder lignende Forandring Sted.

Till. 2. Hvorledes enhver Figur paa Marken (Fig. LXVIII) kan paa samme Maade optages: paa Papiret tegnes en anden ligedan dermed, indsees let. Man deler Figuren ved Diagonaler, som gøres syglige ved Stofke; i de derved opkomne Triangler maales saamange Stykker, som der behøves, for paa Papiret at kunde tegne efter en formindsket Maalestof en Figur, der er ligedan med den givne, som her *Abcdef*.

Till. 3. Ethvert Kort er i sig selv ikke andet end en paa Papiret, efter vilkaarlig mindre Maal, aftegnet Figur, ligestor med den givne paa Marken. Maalestoffens Størrelse beroer paa Omstændighederne; hos os bruge de oeconomiske Landmaalere, efter Rentekammerets Foranstaltning, den Maalestof, at een Decimaltomme paa Papiret svarer til 200 Alen paa Marken.

Anm. 1. Denne her forklarede Oppløsningsmaade brugesielden, da man ved Maalebord og Astrolabium (to Instrumenter som i det følgende beskrives), som og ved Trigonometriens Hielp, meget lettere og hurtigere kan besvare Spørgsmaalet. Smidlertid fortæener denne Maade dog at anmærkes, og er bekendt under Navn af Landmaaling uden Instrumenter.

Man indseer nu ogsaa let, at den hele Landmaalingkunst beror paa Læren om ligestore og ligedanne Triangler og deres Tegning, da man anseer Distancerne imellem forskellige Stæder som Sider i en Triangel, hvoraf man maaler saamange som behøves for at kunde tegne en anden Triangel ligestor eller ligedan dermed.

Anm. 2. Ved oeconomist Landmaaling forstaaes den, som kun har med saa lidet et Stykke af Jordens frumme Overflade at gøre, at det uden Feil kan antages for en Plan, og hvor man paa Kortet skal kunde skielne enhver privat Mandes Eiendom. Om denne Siags Landmaaling er det her tales. Geographist Landmaaling behandler større Stykket af Jordkloden hvor dens frumme Overflade tillige kommer i Betragtning og grunder sig paa andre Principer.

§. 5.

Forkl. 1) Til at optage en Vinkel (3: drage to Linier paa Papiret, der gøre samme Vinkel som to Linier paa Marken) betiener man sig af Maalebordet (mensula prætoriana), som bestaaer af en firkantet Bordskive (hos os almindeligt 15 Tommer lang og 11 Tommer bred), der overtrækkes med Papiir; et Stativ, hvorved Bordskiven kan gives enhver vilkaarlig Stilling, saavel vertikal som horizontal; en trebenet Fod, hvorpaa den hviler; og af Sigt-Linialen, hvorved man, efterat et Punkt

Punkt paa Bordet er fikket lodret over Vinkelspid-
sen paa Marken, kan sigte til Vinklens afstufne
Been, og derefter optrække Linier paa Papiret,
der da vil ligge i samme Planer som de nedstufne
Stofte, og folgelig giøre samme Vinkel med hin-
den som de paa Marken afstufne Linier.

2) Et at maale en Vinkel paa Marken betie-
ter man sig af en i Grader og mindre Dele ind-
deelt Heel, Halv, eller Fierdedeel. Cirkel, af en
halv eller heel Fods eller endnu større Diameter,
som faaer Navn af Maale-Cirkel (geographisk Cir-
kel), Astrolabium, Quadrant o. s. v., der ved
Hjelp af et Stativ fastgøres og stilles paa en God,
begge af samme Indretning som ved Maalebordet,
tillige er den forsynet med een eller to Diopter Li-
nialer, hvoraf den ene lader sig dreie om Vinkel-
maalerens Centrum.

Anm. At forklare disse Instrumenter nælere,
anseer jeg for overflødig, da de bør forevises ved
Undervisningen, hvis deres Indretning ret skal
begribes. Udsærlig findes de ellers beskrevne i Ju-
stitsraad Bugges Forelæsninger, 1ste Deel.

Till. Man bruger ogsaa til Vinklens Udmaa-
ling en Boussole: en i Grader inddeelt Ring,
over hvis Middelpunkt en Magnetnaal frit kan be-
væge sig.

Anm. Hvilket af de anførte Instrumenter der
helst bør bruges, beroer paa Omstændighederne. Ved

Opmaalinger i det Smaa (oeconomist Landmaaling) er Maalebordet det brugbareste; men i det Store, hvor man tillige vil anvende Trigonometrie, er Vinkelmaaleren Astrolabium beqvemmere.

§. 6.

Opgave. At opløse de §. 4 fremsatte Opgaver ved Hielp af Maalebordet.

1ste Tilfælde. Naar man kan fra et Standpunkt C (Fig. 39 Tab. 3) komme til A og B .

Man stiller da Maalebordet over C saaledes, at Punktet C paa Bordet er lodret over C paa Marken; med Diopter-Linealen sigtes fra C mod A og B og Linierne optrækkes paa Bordet, og efter en formindsket Maalestof gøres Ca og Cb paa Bordet ligestore med CA og CB paa Marken. Maales nu Afstanden ab paa Bordet, saa er den i det mindre Maal hvad AB er i det større.

2det Tilfælde. Naar man fra et Standpunkt C (Fig. XL Tab. 3) kan komme til A , men ikke til B .

Man stiller Maalebordet over C og sigter mod A og mod B , optrækker Linier derefter paa Bordet, og gior efter en formindsket Maalestof $cA = CA$. Derpaa flyttes Maalebordet til A , og stilles, at A paa Bordet kommer over A paa Marken og sigter mod B . Paa Bordet forlænges nu
Linie

Linierne fra A og C til de stære hinanden i B , og da er ab paa Bordet i det mindre Maal, hvad AB paa Marken er i det større.

Till, Vil man, uden at flytte Maalebordet hen over Punktet B , maale Afstanden allene fra C , saa skiller man Punktet c paa Bordet lodret over C paa Marken (Fig. LXIII. Tab. 6); i en temmelig Afstand derfra nedstikkes to Stofte D og E , der med A udgiøre en ret Linie; derpaa sigter man fra c til D , E , A og B , optrækker Sigt-Linierne, og gjør efter en formindstet Maalestok cd , ce , ca og cb ligestore med CD , CE og CB . Trækkes nu fra d iglennem e en Linie, som forlænges, da vil den stære cA i a ; da er ab i det mindre Maal, hvad AB er i det større.

Thi $\Delta ced \sim CED$, folgelig $\angle cda = CDA$, men ogsaa $\angle acd = ACD$, altsaa $\Delta dac \sim \Delta DAC$ og $ca : cd = CA : CD$, men efter Construction $cd : cb = CD : CB$, altsaa $ca : cb = CA : CB$; og da $\angle acb = \angle ACB$, saa er $\Delta acb \sim \Delta ACB$, folgelig $cb : ba = CB : BA$.

3die Tilfælde. Naar man fra C hverken kan komme til A eller B .

Fra Punktet C (Fig. XII Tab. 4) afstikkes Linier mod A og B , som forlænges paa den anden

Gide

Side af C , og en Stof nedfættes i disse forlættede Linier i E og D . Man stiller Maalebordet over Punktet E , og afmaaler paa Bordet efter formindsket Maalestof $ed = ED$; fra e optrækkes Eigt-Linierne em , en . Nu flyttes Maalebordet, Punktet d paa Bordet bringes nøyagtig over Punktet D paa Marken, og Linien de i samme Retning som DE . Fra d sigtes nu mod A og B ; og man marker nøy hvor disse Linier skære de forrige fra Punktet e trækne Eigt-Linier i a og b , saa er Linien ab paa Bordet i det formindskede Maal, hvad AB er paa Marken i det virkelige Maal. Bevist herfor er let, da Figuren dab paa Bordet bliver ligedan med $DEAB$ paa Marken.

Till. 1. Hvorledes alle tre Tilfælde ved Hielp af Astrolabium eller en anden Vinkelmaaler kan opløses, indsees let; man maaler nemlig de nødvendige Vinkler og Sider, og tegner paa Papiret en ligedan Triangel, hvori man kan maale det Søgte.

Till. 2. Ved Trigonometrien opløses disse tre Tilfælde endnu lettere, da man, efter at have maalet de til en Triangels Bestemmelse nødvendige Stykker, regner sig til de øvrige (Trigon. §. 1).

§. 7.

Opgave. Ved Hielp af Instrumenter at optage en Grundtegning af en Figur paa Marken: at tegne en Figur paa Papiret ligedan med en anden paa Marken.

Oploesn I Almindelighed bestaaer det i, at man inddeler Figuren paa Marken i Triangler og maaler saa meget af enhver, som behøves for at frembringe paa Papiret en ligedan Triangel. Men efter de forskjellige Omstændigheder kan der gives forskjellige Tilfælde; jeg vil her anføre allene de mærkeligste.

1ste Tilfælde. Naar man kan komme ind i Figuren og efter Behag affikke og maale Linier.

Man vælger da et Punkt *C* (Fig. XIV Tab. 4) i Figuren, hvorfra man kan, om muligt, see til alle dens Hjørner. I dette Punkt opstilles Maalebordet saaledes, at et Punkt *c* paa Bordet er lodret over Punktet *C* paa Marken. Man optrækker da Sigt-Linier til alle Figurens Vinkelspidser *Ca*, *Cb*, *Cc*, *Cd*, *Ce* og *Cf*, og efter den formindskede Maalestof gøres disse Linier ligestore med *CA*, *CB*, *CC*, *CD*, *CE*, *CF*; derpaa trækkes Linierne *ab*, *bc*, *cd*, *ef* og *fa*, saa er Figuren *abcdef* paa Maalebordet ligedan med Figuren *ABCDEF* paa Marken.

Anm.

Anm. Tre der Hindringer, som gjorde det umuligt at maale en eller anden af Linierne fra C , som f. Ex. CA , da maaler man i dets Sted Siden AB , og fra b med en Radius, der efter den antagne Maalestof er ligestor med AB , afficerer man ba .

Till. Vil man istedet for Maalebordet bruge Astrolabium eller en anden Vinkelmaaler, da stilles det i Punktet C , og alle Vinklerne ved C maales, da deraf og af de fra C til Vinkelspidserne maalte Linier, en Figur kan tegnes paa Papiret ligedan med den paa Marken.

2det Tilfælde. Naar man ikke kan komme ind i Figuren.

Man stiller Maalebordet over en af Figurens Vinkelspidser A (Fig. XV), optrækker Sigtlinier mod E og B , og gjør efter den formindskede Maalestof $ab = AB$. Derpaa flyttes Bordet hen over B , saa at b kommer lodret over B og ba i Linie med AB . Fra b sigtes nu mod C ; og har man fra A optrukket Sigtlinien ac , saa er nu c bestemt uden at maale AC . Saaledes vedblives indtil man har den hele Figur.

Till. 1. Kan man fra en Vinkelspidse oversee hele Figuren, da stiller man Maalebordet over denne Vinkelspidse A (Fig. XVI) og optrækker Sigtlinier til alle de andre Hjørner; man maaler derpaa AB og affætter efter den antagne Maalestof $ab = AB$

$\equiv AB$; med en Pasſer-Nabning, der er paa ſamme Maade ligestor med BC , afſtiæres bc o. s. f.

Till. 2. Har man med en Vinkelmaaler maalt alle Vinklerne ved A og desuden Siderne i Figuren, da kan deraf paa Papiir tegnes en Figur ligedan med den paa Marken.

3die Tilfælde. Naar man fra to Standpunkter kan overſee alle Figurens Sider og Vinkler.

Den antagne Standlinie være FG (Fig. LXVI Tab. 6). Man ſtiller Maalebordet over den ene Ende F , ſaa at f paa Bordet er lodret over F paa Marken, og ſigter ſaa at fg paa Bordet (der gøres i det mindre Maal ligestor med FG paa Marken) kommer i lige Linie med FG , og derpaa drages fra f Sigttlinier til alle Vinkelſpidſer i Figuren; derpaa flyttes Maalebordet og ſtilles i G , ſaa at g paa Bordet bliver lodret over G paa Marken og gf i ſamme Retning ſom GF . Fra G ſigtes nu til alle Figurens Hjørner; diſſe Sigttlinier vil overſtiære de tilforn fra F trukne, og ſaaledes beſtemme Figurens Hjørner, der forbindes med rette Linier, og Figuren $abcde$ bliver ligedan med $ABCDE$ paa Marken.

Till. Ved ſamme Fremgangsmaade beſtemmes Beliggenhed af de forſkiellige Gienſtande, ſom fra en ſaadan antaget Standlinie kan ſees.

Anm.

Anm. Stand-Linien maae ikke være alt for kort, ikke give alt for spidse eller stumppe Vinkler, og dens Længde maae paa det nøiagtigste maales.

§. 8.

Forkl. Ved Høiden af en over Jorden op-
højet Gienstand forstaaes en lodret Linie fra Gien-
standens Spidse til Jorden. At finde denne per-
pendicular kaldes Høidemaaling, og stcer lettest
ved Trigonometrie. Kalder eller Skræningen
fra et Punkt paa Jordens Overflade til et andet
er Forskiellen imellem to Stæders Horizont. At
bestemme den kaldes Nivellering (Bandsmaaling),
og forudsætter mathematisk-geographiske Kundskaber.

§. 9.

De mærkeligste Tilfælde ved Høidemaaling er
1) Naar man fra et antaget Standpunkt C
(Fig. XIII Tab. 4) kan' komme til den nederste
Ende B af den lodrette Høidelinie AB .

Man maaler da Linien CB , over C stilles In-
strumentet (Maalebordet eller Astrolabium), hvor
Høiden antages $= CE$, og derved maales Vinklen
 FEA ; man har da $EF = BC$, Vinklen AFE
 $= R$ og Vinklen AEF bekiendt. Heraf kan ved
Tegning, og lettere ved trigonometrisk Beregning,
findes Linien AF ; lægges dertil $BF = CE$ (In-
stru-

strumentets Høide), saa er den søgte Høide AB fundet.

2) Naar man ikke fra det antagne Standpunct C kan komme til B .

Man maaler da i en ubestemt Afstand fra B Standlinien CD , stiller Instrumentet over C , og bestemmer Vinklen AEF og derved tillige AEG . Derpaa føres Instrumentet hen over D , og Vinklen AGE bestemmes. Af disse Vinkler og Siden $EG = CD$ kan Trianglen AEG bestemmes ved Tegning eller Beregning. Er det skeet ved Tegning, og man fra A sælber en lodret Linie AF paa den forlængede EG , saa vil den i det formindskede Maal, naar den nøiagtig udmaales, være hvad AF virkelig er; og lægges hertil som for Instrumentets Høide FB , da findes Linien AB . Har man ved Trigonometrie af de maalte Ting i $\triangle AEG$ fundet AE , saa kan man i $\triangle AFE$ videre regne sig til AF og dertil lægge FB .

Anm. Den antagne og maalte Stand-Linie (hvorved forstaaes en vilkaarlig antagen Linie) maae ikke være for kort, som EC (Fig. LXI), da Vinklen $\angle AC$ bliver saa liden, at den ikke nøiagtig kan maales, men heller maae den, naar Omstændighederne tillade det, tages tilstrækkelig lang, som ED .

Till. Indtræffer det næstforegaaende Tilfælde med den Omstændighed, at man fra det over
Stand

Standpunktet C (Fig. XIII Tab. 4) liggende Punkt E kan see Punktet B , som ligger lodret under A , da kan man fra dette ene Punkt bestemme AB paa følgende Maade: Ved Hielp af Instrumentet maa-
 ler man Vinklerne AGE og GDC , hvorved man har tillige Vinklen EDB , som er $= R - BDG$
 $DG =$ Instrumentets Hsides er ogsaa bekiendt. Man kan da efter den formindskede Maalestok af-
 sætte Linien DC , og ved D Vinklen BDG , samt fra C en lodret Linie, der vil skære DB i Punktet B ; fra dette Punkt B oprettes en lodret Linie, som forlænges indtil den skæres af DA i Punktet A .

Anm. 1. Denne Maade lader sig ikke vel anvende, naar Hsiden, man vil finde, er meget stor i Sammenligning med Instrumentets Hsides, eller naar AB er mange Gange større end CD .

Anm. 2. Om Nivellering troer jeg det her ikke passende at anføre noget.

D m f r u m m e L i n i e r

i

A l m i n d e l i g h e d.

I n d l e d n i n g.

§. 1.

Ved en frum Linie forståes enhver Linie, der kan tænkes at blive til ved Bevægelsen af et Punkt der hvert Øieblif forandrer sin Retning.

For at bestemme en saadan frum Linies Egenskab (Natur) maa man søge at udfinde den Lov, som Punktet retter sig efter i sin Bevægelse; og udtrykke denne Lov ved en Ligning (Equation). Denne Lov bestemmer den frumme Linies Natur.

Den Lov f. Ex. som Punktet *M* (Fig. 1) følger i at beskrive en Cirkel, er, at det stedse beholder samme Afstand fra Centrum. Denne Lov eller Cirkelliniens Natur kan paa følgende Maade udtrykkes ved en Ligning: Man tage et vilkaarligt Stykke af Diameteren *AB*, for Exempel *AP*, (som kaldes *x*) opreise fra Punktet *P* en lodret Linie til Peripherien *PM* (som nævnes *y*) og Diameteren *AB* sættes $= a$, saa har man (Geom.

$$\S. 58) AP. \quad PM \equiv PM : PB, \text{ s: } x : y \\ \equiv y : (a - x) \text{ og}$$

$$\text{deraf } y^2 \equiv (a - x) x \equiv ax - x^2$$

$$\text{følgelig } y \equiv \sqrt{ax - x^2}$$

Denne fundne Ligning viser hvorledes ethvert Punkt i Cirkellinien kan bestemmes naar Diameteren a er givet; da man til ethvert antaget x kan finde det dertil hørende y ved Hielp af den fundne Ligning; udtrykkes a og x i Tall, da findes y ved Regning; udtrykkes de derimod i Linier, da findes y ved at forandre den fundne Ligning til en Proportion, og vi faae da $x : y \equiv y : a - x$ og det til ethvert antaget x svarende y er en Mellemproportionallinie imellem det antagne x og det af Diameteren tilbageblevne Stykke $a - x$.

Sæt f. Ex. $a \equiv 10$, antag $x \equiv 1$, da bliver $a - x \equiv y^2$ og $y \equiv \sqrt{10 - 1} \equiv \sqrt{9} \equiv 3$ lad x være $\equiv 2$, da bliver $y \equiv \sqrt{20 - 4} \equiv \sqrt{16} \equiv 4$. Er $x \equiv 3$ bliver $y \equiv \sqrt{30 - 9} \equiv \sqrt{21} \equiv 4,5 \dots x \equiv 4$ er $y \equiv \sqrt{40 - 16} \equiv \sqrt{24} \equiv 4,9 \dots x \equiv 5$ og $y \equiv \sqrt{50 - 25} \equiv \sqrt{25} \equiv 5$.

Hvorledes Mellemproportionallinier imellem de forskjellige antagne x og det øvrige af Diameteren $a - x$ findes, er lært i Geom. §. 59.

§. 2.

De frumme Linier, hvis Natur kan udtrykkes ved en algebraisk Ligning, (en algebraisk Ligning kaldes den, der kan ordnes og indrettes saaledes, at der i den ikke findes noget irrationalt Led; og at ingen foranderlig Størrelse forekommer dert enten som Rævner eller Exponent) faae Navn af algebraiske frumme Linier. Saaledes er Ligningen $y = \pm \sqrt{px}$, da den ogsaa saaledes kan udtrykkes $y^2 = px$, en algebraisk Ligning, og altsaa er den frumme Linie (Parablen), hvis Natur udtrykkes ved den anførte Ligning, en algebraisk Frum Linie.

Derimod faae de frumme Linier, hvis Natur ikke lader sig udtrykke ved nogen algebraisk Ligning, eller i hvis Ligninger der findes Cirkelsbuer, Sinuser, andre trigonometriske Funktioner og Logarithmer eller uendelige Rækker, der ikke nøie lade sig summere, Navn af mekaniske eller transcendent Linier. Exempel paa saadanne frumme Linier ere de der udtrykkes ved følgende Ligninger:

$$1) y = \sqrt{a^2 - x^2} + a n : \cos. (1 = x).$$

$$2) y = a \log. x . y = b + bx + \frac{bx^2}{1 \times 2}$$

$$+ \frac{bx^3}{1 \times 2 \times 3} . . .$$

§. 3.

For at bestemme en frum Linies Natur (Fig. I. Tab. 2.) som ligger i en og samme Glade, ved Hielp af en Ligning; pleier man almindelig i samme Glade at trække en vilkaarlig ret Linie (AB), og fra forskellige Punkter i samme at opreise Perpendicularer til forskellige Punkter i den frumme Linie. Man antager derpaa i den rette Linie AB forskellige Stykker AP , regnede enten fra Giennemsnitspunktet A , hvor den frumme Linie skærer AB , eller fra et andet vilkaarligt Punkt i AB , og søger at finde et Udtryk for ethvert PM ved Hielp af det tilhørende Stykke AP og andre bekiendte Størrelser. Den antagne Linie AB kaldes Abscisse-Linien; det paa samme antagne faste Punkt A hedder Abscissernes Begyndelsespunkt. De fra forskellige Punkter i Abscisse-Linien til den frumme Linie dragne Linier (almindelig lodrette), kaldes Ordinater, og de dertil hørende Stykker paa Abscisse-Linien (regnede fra det antagne faste Punkt) kaldes Abscisser, som her Stykkerne AP , AE &c.

Efter den almindelige Vedtægt betegnes enhver Abscisse med x , og den dertil hørende Ordinate med y (disse ere de foranderlige Størrelser). De uforanderlige rette Linier, som tiene til at bestemme en frum Linies Beliggenhed, benævnes al-

min

mindelig med Bogstaverne a, b, c . De gamle Geometere kaldte Mm en Ordinate eller Applicata, og PM eller Pm en halv Ordinate.

Deler Abscisse-Linien alle fra et Punkt til et andet i den frumme Linie parallel igiennem den trufne Linier i to ligestore Dele, eller (hvilket er det samme) naar til enhver Abscisse hører to ligestore Ordinater i modsatte Retninger, faaer den Navn af den frumme Linies Diameter. Den Diameter der deler de ommeldte Paralleler under en ret Vinkel i to ligestore Dele, faaer i Sørdes-leshed Navn af den frumme Linies Arel.

§. 4.

En ret Linie TM (Fig. II Tab. 7), som, truffet i samme Glæde, berører en frum Linie i et eneste Punkt M , uden at skære den, kaldes en Tangent til Punktet M . Stykket (PT) af Abscisse-Linien, der ligger imellem Ordinatens PM og Punktet T , hvor Tangenten skærer Abscisse-Linien, kaldes Subtangent. Den rette Linie MN , som fra Berøringspunktet M opreises lodret paa Tangenten TM og forlænges til Abscisse-Linien, kaldes Normal-Linie v. Normalen, og Stykket PN af Abscisse-Linien, imellem den til Punktet M hørende ordinate PM og Punktet N , hvor den fra

M opreiste lodrette Linie træffer Abscisse-Linien, kaldes Subnormal-Linie eller Subnormalen.

En ret Linie *TO* (Fig. 2) der nærmer sig den frumme Linie *AM*, uden dog nogensinde at skære den, om de end begge forlænges nok saa langt, kaldes den frumme Linies Asymptote. At der virkelig gives frumme Linier som har Asymptoter, saae vi Leilighed at vise i det følgende.

§. 5.

Naar en af de foranderlige Størrelser (*x* eller *y*) høieste Exponent eller Summen af begge Exponenter af et Led i en ordnet Ligning for en algebraisk frum Linie er $= 2$, saa kaldes den dertil hørende frumme Linie en Linie af 2den Orden eller en frum Linie af 1ste Orden. Er derimod den høieste Exponent eller den høieste Summe af begge Exponenter $= 3$, saa kaldes den dertil hørende frumme Linie en Linie af 3de Orden, eller en frum Linie af anden Orden. Man regner desuden de algebraiske frumme Linier af forskellige Ordener, hvis Ligninger indeholde Led af een Slags, hvis Exponenter blot ere forskellige, til samme Familie, saaledes f. Ex. høre alle de frumme Linier, hvis Natur udtrykkes ved følgende Ligninger: $y^2 = px$, $y^3 = p^2x$, $y^3 = px^2$,
 $y^4 =$

$y^4 = p^3 x$, $y^4 = p^2 x^2$, $y^4 = p x^3$, $y^{m \mp n} = p^m x^n$, til een og samme Familie.

Anm. Ved at undersøge de frumme Linier, maa man lægge Mærke til 1) enten af den frumme Linies Beliggenhed, saaledes som den dannes ved Snittet igiennem et Legeme, at udlede en Ligning, hvorved dens Natur tilkienbegives; eller af den givne Ligning at tegne den derved bestemte frumme Linie, som altid kan gøres arithmetisk; i det følgende skal vises, at det og kan gøres saavel geometrisk som mekanisk. 2) Til ethvert givet Punkt i den frumme Linie at finde den tilhørende Tangent, Subtangent, Normale og Subnormale. 3) At bestemme Stedet for den første eller mindste Ordinate. 4) At beregne Flade Indholdet, som indsluttes af en vis Abscisse, den dertil hørende Ordinate og Bue. 5) At bestemme den virkelige Længde af en given Bue.

§. 6.

Opgave. At finde en Ligning for Cirklen.

Opl. Man trækker Diameteren AB (S. I S. II) og fra forskellige Punkter paa den opreises lodrette Linier til Omfirdsen; saa er enhver af disse en Mellemproportionallinie imellem Diameterens Stykker AE og EB , eller saa er $AE : ED = ED : EB$ (Geomet. §. 64.)

Antager man nu $AB = a$ (Fig. I. Tab. 2), $PM = y$, $AP = x$ altsaa $PB = a - x$,
saa

saa er $x : y = y : a - x$, altsaa $y^2 = ax - x^2$, som er Ligningen for Cirkelen.

Exll. 1. Denne Ligning indeholder to ubekjendte Størrelser og er ubestemt, men antages den ene som bekjendt, bliver den anden derved bestemt. Antager man nemlig et vilkaarligt Stykke af Diameteren som $AP = x$, hvortil efter Ligningen hører et vist y , og opreiser fra P en lodret Linie PM , af samme Længde som y , saa finder man Punktet M i Omkredsen. Man seer heraf tillige Punktet M 's Beliggenhed imod Linien AB , da ved AP Punktet P , og ved PM Punktet M er bestemt.

Exll. 2. Da ethvert Punkt i Omkredsen ligger i en saadan lodret Linie (ordinate) og til denne hører et vist Stykke af Diameteren (Abscisse) saa kan alle Punkter i Omkredsen bestemmes, naar man paa Diameteren AB antager alle mulige Værdier for x .

Da der nu ikke gives noget Punkt i Cirkelens Omkreds, som jo lader sig bestemme ved denne Ligning, saa kan den ansees som en fuldstændig Definition paa Cirkel-Linien, hvoraf dens Natur og dens forskjellige Punkters Beliggenhed mod hinanden, nøiagtigt lader sig bestemme.

§. 7.

Forklar. I den i forrige §. anførte Ligning forandre Størrelserne x og y deres Værdie efter en bestemt Lov, som er: at naar enhver af disse Størrelser tillægges en vis Værdie, vil den næste efterfølgende ikke have nogen mærkelig Forskiel i Størrelse. Størrelser af denne Art, der kan tillægges alle mulige Værdie, kaldes foranderlige Størrelser (Variabiles) i Modsatning af de bestandige, som under alle Forandringer af x og y stedse beholde samme Værdie. De foranderlige Størrelser pleier man at betegne med de første, og de bestandige eller uforanderlige med de sidste Bogstaver i Alfabetet.

§. 8.

Forklar. En foranderlig Størrelse y , som bestemmes ved en anden foranderlig Størrelse x , og ved en bestandig Størrelse a kaldes en Function af Størrelsen x , f. Ex. Udtrykket $ax - x^2 = y^2$ er en Function af x og giver Ligningen for Cirkel, Linien.

En ret Linie som AB (Fig. I) ved hvilken Punkterne i den frumme Linie bestemmes, kaldes Abscisse-Linie; Punktet A dens Begyndelsespunkt. Stykkerne deraf (som AP AE) kaldes Abscisser,

og

og deres Functioner (som PM , DE) Ordinatorer; med et fælles Navn kaldes begge Coordinatorer, og retvinklede, naar den ene staaer lodret paa den anden.

Till. Coordinatorerne kan sættes sammen under alle mulige Vinkler, kun at den eensgang antagne stedse beholdes, for at alle Ordinatorer kan blive parallelle. For Cirkel-Linien have vi antaget retvinklede Coordinatorer (§. 6), som ogsaa siden skal iagttages ved de andre frumme Linier, ligesom og Abscisserne stedse skal betegnes med x , og Ordinatorerne med y , saalænge indtil en anden Benævnelse udtrykkelig anføres.

Till. 2. Enhver ret Linie, der ligger i samme Flade som den frumme Linie, kan antages som Abscisse-Linie, og ethvert Punkt i den regnes for Begyndelsespunktet.

§. 9.

O p g a v e. At finde en Ligning for Cirklen fra dens Middelpunkt (naar Middelpunktet tages for Abscissernes Begyndelsespunkt).

Oplosn. Antage vi Ordinaten $PM = y$, men Abscissen $CP = u$ og $AB = a$, saa er $AP = \frac{1}{2}a + u$, men $PB = \frac{1}{2}a - u$. Efter Geometrien (§. 64) er $AP : PM = PM : PB$, altsaa (naar de vedtagne Udtryk ind-

sættes)

sættes) $\frac{1}{2}a + u : y = y : \frac{1}{2}a - u$ og $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$, hvilket og indsees af den pythagoriske Læresætning, naar CM gøres $= \frac{1}{2}a$.

Till. De to for Cirklen saaledes fundne Ligninger, nemlig 1) $y^2 = ax - x^2$ (hvor A var Abscissernes Begyndelsespunkt) og den nu fundne 2) $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$, lade sig ulede den ene af den anden. Saaledes er $AP = AC + CP$ $\therefore x = \frac{1}{2}a + u$; indsættes nu denne Værdie for x i Ligningen $y^2 = ax - x^2$, faaer vi $y^2 = a(\frac{1}{2}a + u) - (\frac{1}{2}a + u)^2 = \frac{1}{2}a^2 + au - (\frac{1}{4}a^2 + au + u^2) = \frac{1}{4}a^2 - u^2$.

Endelees er $CP = AP - AC$ $\therefore u = x - \frac{1}{2}a$; indsættes denne Værdie for u i Ligningen $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$, faaer vi $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - (x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2)$ $\therefore y^2 = ax - x^2$.

Af Ligningen $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$ følger, at $y = \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - u^2}$, som giver to ligestore men modsat liggende Ordinater PM og Pm . Til et hvert x hører saaledes 2y i modsatte Beliggenhed, hvoraf den ene kan ansees som nægtende, den anden som bekræftende. Cirkel-Linien gaaer altsaa frem paa begge Sider i samme Afstand fra Diameteren. Paa samme Maade blive, naar C antages som Abscissernes Begyndelsespunkt, og

Absci.

Abscisserne mod B antages som bekræftende, de mod A benægtende.

Anm. Man kan saaledes for samme Linie give flere forskellige Definitioner, der alle uledes af Linies Egenheder, og hvorefter den ene kan uledes af den anden.

§. 10.

Def. 1. En ret Linie AB som halverer de parallelle Chorder af en krum Linie enten under en Vinkel eller en ret Vinkel; faaer i begge Tilfælde Navn af den krumme Linies Diameter, og i sidste af dens Axl. Det Punkt af Axlen hvor den skjæres af den krumme Linie kaldes Linies Toppunkt (vertex), hvortil ingen Ordinate hører eller, som er det samme, hvis Ordinate er $= 0$.

Anm. 1. Af de krumme Linier, hvormed den høiere Geometrie især har at gjøre, er næst Cirkelen (der dog ogsaa betragtes i Elementar-Geometrien) de mærkeligste Parablen, Hyperbelen, Ellipsen, hvilke almindeligt faaer Navn af Kegelsnitte, da de lade sig udføre af en en ret Regle. Man kan betragte disse Linier paa to Maader; enten uleder man af deres Beliggenhed i Kegelsnittet deres Ligninger, eller og man af de givne Ligninger bestemmer de dertil hørende Linier. Den sidste Methode (almindeligt kaldet den analytiske) vil jeg her følge, dog tillige kortelig berøre den første (den synthetiske).

Anm.

Anm. 2. Lad p være en bestandig Linie i Reglesnittene (almindelig kaldet paramenter) der antages som den ene Sidelinie i en Rectangel, hvor Abscissen x er den anden, saa er Quadrattet af den til Abscissen svarende Ordinate y^2 enten ligestor med denne Rectangel $y^2 = px$, eller større $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$, eller mindre $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, dette udtrykte

Grækerne ved Ordene $\pi\alpha\rho\alpha\beta\alpha\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$ (congruere) $\upsilon\pi\epsilon\rho\beta\alpha\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$ (excedere) og $\epsilon\lambda\lambda\epsilon\iota\pi\epsilon\iota\nu$ (dificere). Deres af kom Navnene Parabel, Ellipse og Hyperbel.

Anm. 3. Theorien om Reglesnittene er i Physik og Astronomie aldeles nødvendig, da f. Ex. alle udfastede Legemer beskrive en Parabel, og Planeterne bevæge sig i Ellipser omkring Solen.

I. Om Parablen.

§. II.

Forkl. Parablen kaldes den frumme Linie, hvor med Forudsætning af retvinklede Coordinater $y^2 = px$ ∴ Quadrattet af Ordinaten er ligestor med et Rectangel af den bestandige Linie Parametren p og Abscissen.

Føll. Af den givne Equation findes følgende Proportion $x : y = y : p$ ∴ den til enhver Absciss

Abscisse (x) svarende Ordinate (y) er en Mellemproportional Linie imellem den antagne Abscisse og den bestandige Linie Parameteren (p). Herved opløses let følgende Opgave.

§. 12.

Opgave. At bestemme ethvert Punkt i Parablen ved Hielp af Elementar-Geometrien.

Opløsn. Man trækker en ret Linie AQ (Abscisse-Linien) hvor A antages at være Abscissernes Begyndelsepunkt, og fra A i den modsatte Retning affættes AB ligestor med den bestandige Linie Parameteren. For en vilkaarlig Abscisse AP beskriver man over BP en Halv-Cirkel, opreiser fra A til Cirkelns Peripherie en lodret Linie AG ; videre opreises fra P en lodret Linie PM , som ved at trække $GM \mp AP$ gøres $\equiv AG$, og nu er Punktet M et Punkt i Parablen.

Paa samme Maade bestemmes flere Punkter i Parablen nær ved hinanden, og forbindes ved en Linie, trukket paa fri Haand, hvorved Parablen tegnes.

Fikl. 1. Parablen bliver af Axlen AQ deelt i to congruente Dele.

Fikl.

Lill. 2. Antages $y = 0$, bliver $x = 0$, Parablens Axl overføres, altsaa af Parablen. Ved Abscissernes Begyndelsepunkt A , som derfor faaer Navn af Parablens Toppunkt.

Lill. 3. Saalænge x (Abscissen) antages bekræftende, bliver $px = y^2$ ogsaa bekræftende, altsaa $\sqrt{y^2} = \sqrt{px}$ en mulig Størrelse, der voxer efterhaanden som x voxer (da p er en bestandig Størrelse); tænkes altsaa x at tiltage uden Ende, vil y ligeledes. Parablens Grene løbe altsaa fort paa begge Sider af Axlen uden Ende, og fjerne sig stedse længere fra hinanden.

Lill. 4. Antages Abscissen x at voxre ved et Tillæg af Størrelsen $PQ = g$, og Ordinatens ved et Tillæg af $NH = v$, saa at $PM = QH = \sqrt{px}$, følgelig $QN = v + \sqrt{px}$; nu er ogsaa $QN = \sqrt{p} \times AQ = \sqrt{p} (x + g)$, altsaa $v + \sqrt{px} = \sqrt{p} (x + g)$, eller naar begge Størrelser kvadreres $v^2 + 2v\sqrt{px} + px = px + pg$, følgelig $v^2 = pg - 2v\sqrt{px}$.

Lader man nu Abscissen bestandigt voxre ved et Tillæg af en uforanderlig Størrelse g , saa at pg bliver uforanderlig, saa kan i den forrige Ligning, naar x voxer, v hverken være uforanderlig, heller ikke voxre tilligemed x , da i begge Tilfælde v^2 skul-

de blive mindre, som skrider mod det anførte. y bliver altsaa mindre naar x bliver større.

Naar derfor to Abscisser, x og X , vore liges meget, vil Ordinaten for den mindre vore noget mere end Ordinaten for den større.

Enhver af Parablens Grene bortfierner sig derfor rigtig nok stedse mere og mere fra Axelen, men denne Afbigelse bliver, naar Abscissen har samme Tilvæxt, stedse mindre jo større Abscissen er. Parablens Grene nærme sig saaledes mere og mere til at blive parallelle med dens Axel, uden dog at det nogenstunde skeer.

§. 13.

Antages Abscissen nægtende ($-x$) bliver $y^2 = -px$ og y en umulig Størrelse. Parablen gaaer altsaa ikke paa den anden Side af A , og løber kun fort mod een Side med to Grene uden Ende.

Till. Lænke vi os to forskellige Abscisser, x og z , og deres tilhørende Ordinatorer y og u , saa er $y^2 = px$ og $u^2 = pz$, følgelig $y^2 : u^2 = px : pz = x : z$, eller ogsaa $y : u = \sqrt{x} : \sqrt{z}$ d: Abscisserne forholde sig som Quadraterne af Ordinatorerne (sunt in ratione duplicata ordinatarum)

og Ordinaterne som Quadratrødderne af Abscisserne (sunt in ratione subduplicata abscissarum).

§. 14.

Ved Reglesnittene kaldes det Punkt i Aksen, hvis tilhørende Ordinate er saa stor som den halve Parameter, Fokus eller Brændpunkt; saaledes i Parablen Punktet F , naar Ordinaten FT er er saa stor som den halve, Parameter.

Exill. Brændpunktets Afstand fra Toppunktet i Parablen er $= \frac{1}{4}p$, thi efter Forklaringen er $FT = \frac{1}{2}p$, altsaa $FT^2 = \frac{1}{4}p^2 = px = p \times AF$, og saaledes $AF = \frac{1}{4}p$.

§. 16.

Lær sæt. Ethvert Punkt i Parablen ligger saa langt fra Brændpunktet som en ret Linie der bestaaer af den til Punktet hørende Abscisse og Afstanden fra Fokus til Toppunktet.

Beviis. M være et vilkaarligt Punkt i Parablen, fra Fokus trækkes Linien FM , saa er $FM^2 = PM^2 + PF^2$, men nu er $PM = y$, altsaa $PM^2 = y^2 = px$, og $PF = (AP - AF) = x - \frac{1}{4}p$, følgelig $PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2$ og $FM^2 = px + x^2 - \frac{1}{2}px + \frac{1}{16}p^2 = x^2$

$$= x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{4}p^2 \text{ og } FM = \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}px + \frac{1}{4}p^2} = x + \frac{1}{4}p.$$

Exll. Herpaa grunder sig en anden og lettere Maade at tegne Parablen paa end den forhen forklarede. Man trækker Axlen og afætter paa den anden Side af Toppunktet A Linien $AL = AF$ og opretter til en vilkaarlig Abscisse AP i Punktet P en lodret Linie, som man fra F med en Radius $LP = AL + AP = (x + \frac{1}{4}p)$ overstikker i Punkterne M og m der da blive Punkter i Parablens Omfreds. Paa samme Maade findes for enhver anden Abscisse de tilhørende Punkter i Parablen, og igiennem alle disse Punkter kan, naar de ere nær nok ved hinanden, Parablen tegnes paa frie Haand.

II. Om Ellipsen.

§. 16.

Forkl. Ved en Ellipse forståes en frum Linie, hvor (under Forudsætning af retvinklede Coordinater), $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ (hvor a betegner den store Arel, og p Parameteren) eller

$$y^2 =$$

$$y^2 = \left(p - \frac{px}{a}\right)x \quad \text{:} \quad \text{Quadratet af enhver}$$

Ordinate saa stor som en Rectangel hvis ene Side er Abscissen og den anden Parameteren formindsket ved at fradrage $\frac{px}{a}$: en fjerde Proportional-Linie til Axlen, Parameteren og Abscissen.

Exll. 1. Antages $y = 0$, maa x enten være $= 0$ eller $x = a$; thi da $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$, saa (naar $x = a$) er $y =$

$$ap - \frac{a^2 p}{a} = ap - ap = 0; \text{ er } x = 0$$

er hele Udtrykket $px - \frac{px^2}{a} = 0$ (da ethvert

Produkt, hvor en enkelt Faktor er $= 0$, er selv 0). Er altsaa A (Fig. II Tab. V) Abscissernes Begyndelsespunkt og $AB = a$, saa ligge Punkterne A og B baade i Axlen og i Ellipsen, ere altsaa Ellipsens Toppunkter.

Exll. 2. Da $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ og $y =$

$$\pm \sqrt{px - \frac{px^2}{a}}, \text{ saa hore til enhver Abscisse}$$

AP to ligestore Ordinatorer, men i modsat Beliggenhed som PM og Pm .

Lill. 3. Ellipsen er altsaa en i sig selv tilbageløbende frum Linie, og bliver af sin Arel deelt i to ligestore og ligedannede Dele.

Lill. 4. Af den første anførte Equation for Ellipsen $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ findes, ved at multiplicere med a , $ay^2 = p(ax - x^2)$ og ders af Proportionen $y^2 : x(a - x) = p : a$. Antages nu $x = AP$, følgerig $PM = y$, saa er $PM^2 : AP \times PB = p : a$ ∴ Quadratet af enhver Ordinate forholder sig til den under Stykkerne af den store Arel indbefattede Rectangel som Parameteren forholder sig til den store Arel.

Lill. 5. For to vilkaarlige Abscisser x og u antage man Ordinaterne y og z , saa er $y^2 : z^2 = ax - x^2 : au - u^2 = x(a - x) : u(a - u)$. Lad x være $= AP$ og $u = AQ$, saa er $PM^2 : QN^2 = AP \times PB : AQ \times QB$. Quadraterne af to forskjellige Ordinator forholde sig altsaa som de under Stykkerne af den store Arel indbefattede Rectangler.

§. 17.

Fortf. Middelpunktet af den store Arel kaldes Ellipsens Centrum, og en lodret Linie *Dd* paa Axlen igjennem dette Centrum faaer Navn af Ellipsens mindre Arel (*axis conjugatus*) som betegnes med *c*.

Lill. 1. Antages $x = \frac{1}{2}a$, saa er (§. 16 Lill.

$$4) y^2 = \frac{1}{4}c^2 \text{ (da } y = \frac{1}{2}c) = \frac{1}{2}ap - \frac{\frac{1}{4}a^2p}{a}$$

$$= \frac{1}{2}ap - \frac{1}{4}ap = \frac{1}{4}ap, \text{ folgelig } \frac{1}{2}c = \pm \frac{\sqrt{ap}}{2}$$

$$\text{og } c = \pm \sqrt{ap}, \text{ folgelig } c^2 = ap, \text{ og deraf}$$

$$a : c = c : p, \text{ og } p = \frac{c^2}{a} \text{ : Ellipsens min-}$$

dre Arel er en Mellemproportional Linie imellem den store Arel og Parameteren.

Lill. 2. Indsættes nu denne Værdie $\frac{c^2}{a}$

$$\text{istedet for } p \text{ i Ligningen } y^2 = px - \frac{px^2}{a}$$

$$\text{saa faae vi } y^2 = \frac{c^2}{a}x - \frac{c^2}{a^2}x^2 = \frac{ac^2}{a^2}x -$$

$$\frac{c^2}{a^2}x^2 = \frac{c^2}{a^2}(ax - x^2) \text{ vi have altsaa udledet}$$

en Ligning for Ellipsen ved den lille og store Arel.

Till. 3. Af den i forrige Tillæg fundne Ligning for Ellipsen $y^2 = \frac{c^2}{a^2} (ax - x^2)$, uledes den Ligning $a^2 y^2 = c^2 (ax - x^2)$ og deraf Proportionen $y^2 : (ax - x^2) = c^2 : a^2$. Lad være f. Ex. $x = AP$ og $y = PM$ saa $PM^2 : (AP \times PB) = c^2 : a^2$. Saaledes er nu fundet, at Quadrattet af enhver Ordinate forholder sig til den under Stypferne af den store Axl indbefattede Rectangel, som Quadrattet af den mindre Axl til Quadrattet af den større.

Till. 4. Lad (Fig. V) AN være et Stykke af en Cirkelbue, bestrebet fra C med Radius CA uden om Ellipsen AMB ; og for en Abscisse AP , Ordinaten $y = PM$ og $z = PN$, saa er $PN^2 = AP \times PB$ eller $z = ax - x^2$, altsaa $y^2 : z^2 = c^2 : a^2$ og $y : z = c : a$. Saaledes er de sammenhørende Ordinator PM og PN i et bestandigt Forhold.

Lager man, i Følge heraf, Cirkelns Ordinator OL og PN i et bestandigt Forhold som f. Ex. 2 : 3, Stypferne OP og PM o. s. v. saa er den igiennem Endepunkterne K og M trukne Linie en Ellipse.

§. 18.

Opgave. At finde en Ligning for Ellipsen, naar Abscisserne regnes fra Middelpunktet.

Oplosn. Lad Abscissen CP være $= u$, saa er $AP = x = \frac{1}{2}a - u$; indsættes nu denne Værdie $\frac{1}{2}a - u$ i Stedet for x i den for-

hen fundne Ligning $y^2 = \frac{c^2 x}{a} - \frac{c^2}{a^2} x^2$ (§. 17)

saa faaer man $y^2 = \frac{c^2}{2} - \frac{c^2 u}{a} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^2 u}{a}$

$-\frac{c^2 u^2}{a^2}$ som forkortet giver $y^2 = \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2}$

$= \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 u^2}{a^2}$.

Till. 1. Da efter denne Ligning ligestore y paa begge Sider af C give ligestore y , saa vil Ellipsen faaet af den lille Arel Dd som af den store AB blive deelt i to lige store Dtle, altsaa af begge Axlernes blive deelt i fire ligestore Quadranter.

Till. 2. Antages $u = 0$, saa er $y^2 = \frac{1}{4}c^2$ eller $y = \frac{1}{2}c$; sættes derimod $u > 0$ bliver y stedse mindre jo større u bliver. Sættes $u =$

$\frac{1}{2}a$, saelig $u^2 = \frac{1}{4}a^2$ bliver $y^2 = \frac{c^2}{a^2} (\frac{1}{4}a^2 -$

$u^2) = 0$. Antages $u > \frac{1}{2}a$ f. Ex. lad være

$u =$

$$u = \frac{1}{2}a + e, \text{ følgelig } u^2 = \frac{1}{4}a^2 + ae + e^2;$$

$$\text{og deraf udledes } y^2 = \frac{c^2}{a^2} (-ae - e^2) \text{ og}$$

y altsaa en umulig Størrelse. Intet Punkt af Ellipsen ligger altsaa udenfor A eller B . Hele Ellipsen ligger altsaa indenfor disse Grændser.

Lill. 3. Tænke vi os den store Arel a liges stor med den mindre ($a = c$) saa faae vi $y^2 = \frac{1}{4}a^2 - u^2$ ∴ Ellipsen bliver til en Cirkel, hvis Diameter er $a = c = p$ ∴ en Ellipse hvor den største og mindste Diameter og Parameteren ere ligestore, er det samme som en Cirkel.

$$\text{Lill. 4. Af det forrige veed vi at } \frac{c^2}{a^2} u^2 =$$

$$\frac{1}{4}c^2 - y^2 \text{ altsaa } u^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2 y^2}{c^2}. \text{ Sette}$$

vi nu ME parallel med CP , saa at $CE = MP = y$ og $EM = CP = u$, og Abscisserne saaledes tages paa den lille Arel, saa beholder dog Ligningen med forandrede Ordinater samme Form, og det ene følger af det andet. Man maa altsaa udtrykkelig bestemme ved denne Ligning, at a betyder den større og c den mindre Arel, med mindre de begge ere ligestore.

Till. 5. Antages $DE = \frac{1}{2}c - y = w$ og $y = \frac{1}{2}c - w$, folgelte $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - cw + w^2$, saa faaer man (4 Till.) denne Ligning $u^2 = \frac{a^2}{c} \times w - \frac{a^2}{c^2} \times w^2$; og sættes $\frac{a^2}{c} = k$ er $u^2 = kw - \frac{kw^2}{c}$, i hvilken Ligning Abscisserne ere tagne paa den lille Arel fra Toppunktet D , og k er Parameteren for den lille Arel.

Till. 6. Af Ligningen $u^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{a^2}{c^2}y^2$

(Till. 4) findes $u = a \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{c^2}\right)}$, sættes

nu $a = mc$, er $u = mc \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{c^2}\right)} = m$

$\sqrt{\left(\frac{1}{4}c^2 - y^2\right)}$. Antages nu $c = 2$, saa findes $u = m \sqrt{(1 - y^2)}$ hvor $y = CE$ kan betegne Abscissen paa den mindre Arel og u betegne EM Ordinaten, som er parallel med den store Arel.

Anm. Da, i Følge det forhen forklarede, (især 4 Till.) kun Arel og Coordinater ere ombyttede, saa kan c betyde den større og a den mindre Arel naar vi antage $m > 1$.

Till. 7. For Cirklen, hvis Radius er $\frac{1}{2}c$, kalde man Abscissen fra Middelpunktet u , saa er $y^2 =$

$$y^2 = \frac{c^2}{4} - x^2 \text{ folgelig } x^2 = \frac{c^2}{4} - y^2 \text{ eller } a$$

$$= \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - y^2\right)} \text{ hvilken Ligning er næsten}$$

den samme, som den i forrige Tilfælde anførte, da m er en nægte Brøk som ikke er meget større end een, og folgelig er ikke meget forskjellig fra m som er $= a$.

§. 19.

O p g a v e. At bestemme Brændepunktet i en Ellipse.

Opløs. Den Brændepunktet F tilhørende Ordinate y er $= \frac{1}{2}p$ (§. 14) altsaa $y^2 = \frac{1}{4}p^2$

$$\text{eller (da } p = \frac{c^2}{a}) y^2 = \frac{c^4}{4a^2}; \text{ men efter §. 18}$$

$$\text{er } y^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2} \times CF^2; \text{ altsaa } \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2} \times$$

$$CF^2 = \frac{c^4}{4a^2}, \text{ folgelig } \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 = CF^2 \text{ og}$$

$$CF = \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2\right)} = \frac{1}{2}(a+c) \times \frac{1}{2}(a-c)$$

udtrykke vi CF paa en almindelig Maade ved e

$$\text{faa er } e = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2\right)} = \pm \sqrt{a^2 - c^2}$$

2.

Ellipsen har saaledes to Brændepunkter F og f
begge

begge i lige Afstand fra Middelpunktet ($CF = Cf$)
 folgelig og $FD = fd$ (Geom. §. 37)

Exll. 1. Da $FD^2 = CD^2 + CF^2$ (Geom.
 §. 37) men $CD = \frac{1}{2}c$ og $CF = e$, saa er FD^2
 $= \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}e^2$, men nu er $e^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2$ (§.
 19) altsaa $FD^2 = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}a^2$
 og $FD = \sqrt{\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}a = fd$.

Anm. Er $FD = fd = \frac{1}{2}a$, saa er $FD + fd$
 $= a$ d. 2 rette Linier fra Brændepunkterne til den
 lille Arel's Endepunkt udgiøre tilsammentagne den
 store Arel.

Exll. 2. Vil man have en Ligning fra Bræn-
 depunktet f , saa antages $fP = w$. Da $fP =$
 $fC + CP$ saa er $w = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2} + u$ eller w
 $- \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2} = u$ folgelig $u^2 = w^2 - w$

$\sqrt{(a^2 - c^2)} + \frac{a^2 - c^2}{4}$. Indsættes nu denne

Værdie for u^2 i Ligningen (§. 8) faaer man $y^2 =$
 $\frac{c^2}{4a^2} + \frac{c^2 \sqrt{(a^2 - c^2)} w}{a^2} - \frac{c^2 w^2}{a^2}$. Den samme Ligning

findes ogsaa for Brændpunktet F hvor FP
 $= FC - CP$.

Till. 3. Erhöhet af Brændepunkternes Afstand fra Toppunktet A er AF eller $Af = AC$

$$CF = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{(a^2 - c^2)} = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$$

Till. 4. Antages $AF = h$ saa er (Till. 2) $2h - a = -\sqrt{(a^2 - ap)}$ altsaa naar begge Sider kvadreres $4h^2 - 4ah + a^2 = a^2 - ap$ deraf $4h^2 - 4ah = -ap$ og $p = 4h - \frac{4h^2}{a} = 4h \left(1 - \frac{h}{a}\right)$.

Ru er det bekiendt (§. 16) at $y^2 = px \left(1 - \frac{x}{a}\right)$ altsaa seer nu at $y^2 = 4h \left(1 - \frac{h}{a}\right) \times x \times \left(1 - \frac{x}{a}\right)$.

§. 30.

Pæresæt. Summen af tvende Linier FM og fM , trukne fra begge Brændpunkter til et og samme vilkaarligt antaget Punkt i Ellipsen, er liges stor med den store Arel a : $FM + fM = a$.

Bevijs 1) $FM^2 = FP^2 + PM^2$ men $FP = FC - CP = e - u$ og $PM =$ (§. 16) altsaa $FM^2 = e^2 - 2eu + u^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2}{a^2}u^2$ men e er (§. 29) $= \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$

følger

$$\text{følgelig } FM^2 = \frac{a^2 - c^2}{4} - u\sqrt{a^2 - c^2} +$$

$$u^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2 u^2}{a^2} = \frac{1}{4}a^2 - u\sqrt{a^2 - c^2} +$$

$$\frac{(a^2 - c^2)u^2}{a^2}. \text{ } FM \text{ er altsaa ligeslor med Quadrat}$$

Rothen heraf $= \frac{1}{2}a \pm \frac{u}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$; man antager her det øverste Tegn for at faae til ethvert u et bekræftende FM ; da naar u tillægges den største mulige Værdie, nemlig sættes $= \frac{1}{2}a$, bliver FM , naar de øverste Tegn antages, bekræftende, i modsat Tilfælde benægtende; hvilket gielder endnu mere naar vi antage $u < \frac{1}{2}a$.

$$\text{II) Da } fM^2 = (c + u)^2 + y^2 = \frac{a^2 - c^2}{4}$$

$$+ u\sqrt{a^2 - c^2} + u^2 + \frac{c^2}{4} - \frac{c^2}{a^2}u^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$+ u\sqrt{a^2 - c^2} + \frac{a^2 - c^2}{a^2}u^2 \text{ saa er } fM =$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{u}{a}\sqrt{a^2 - c^2}.$$

$$\text{III) Altsaa er } FM + fM = \frac{1}{2}a + \frac{u}{a}\sqrt{a^2 - c^2}$$

$$+ \frac{1}{2}a + \frac{u}{a}\sqrt{a^2 - c^2} = \frac{1}{2}a$$

$$+ \frac{1}{2}a = a.$$

Q.E.D.

Exll. 1. Fra Punktet F beskriver man med en Radius der falder imellem $\frac{1}{2}(a + e)$ og $(\frac{1}{2}a - e)$ x imellem AF og Af og fra Af med en Radius $a - x$ Cirkelbuer over og under AB , saa give deres Gjennemsnitte modsatte Punkter i Ellipsen M og m ; paa samme Maade kan flere findes og Ellipsen tegnes.

Exll. 2. Fastgøres en Traad hvis Længde er $= a$ med begge Enderne i Brændpunkterne og ved en Stift strammes, at den kommer i Berøring med Ellipsen FMf , saa vil Stiften, ført langs med Traaden ved sin vedvarende Bevægelse beskrive Ellipsen.

Exll. 3. Af Læresætningen (§. 30) sees man at $fM - FM = \frac{2u\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} = \frac{4u}{a} \times \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2} = \frac{4u}{a} \times e$. Jo mere nu F og f nærme sig hinanden, destomindre bliver e og følgelig Differencen imellem fM og FM ogsaa mindre; Ellipsen nærmer sig altsaa saaledes stedse mere til en Cirkel, hvis Middelpunkt er C og Radius $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(FM + fM)$. Og antages $e = 0$ bliver Ellipsen fuldkommen til en Cirkel.

§. 21.

Opgave. Igjennem samme Toppunkt A (Fig. V) er trukket en Ellipse AKM , hvis store Arel er $= a$ og en Parabel ALN der har samme Parameter som Ellipsen $= p$; for een og samme Abscisse $AO = x$ Forskiellen imellem Ordinaterne $OL = z$ og $OK = y$, altsaa $OL - OK = KL$.

Opløsning. Efter §. 11. er $z = \sqrt{px}$ og (§. 16) $y = \sqrt{px} \left(1 - \frac{x}{a}\right)$ altsaa $z - y = \sqrt{px} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x}{a}}\right)$.

Lill. I. Imedens x voxer i Ellipsen saasidt det Kantil det bliver $= a$, aftager bestandig $1 - \frac{x}{a}$ og salgelig voxer den ene Faktor, nemlig Størrelsen $1 - \sqrt{1 - \frac{x}{a}}$ og tillige den anden Faktor \sqrt{px} ; salgelig voxer ogsaa Produktet $z - y$ i begge Ligningerne; er derimod x meget liben i Sammenligning med a da blive begge Faktorerne og salgelig Produktet $z - y$ meget lidet. Ved en Ellipse med en meget lang Stor-Arel er altsaa Buerne i Parablen og Ellipsen i samme Afstand fra det fælles Toppunkt meget lidet forskiellige fra hinanden.

Lill.

Till. 2. I Ellipsen er (§. 19 Till. 3.) Brændepunktets Afstand fra Topunktet $= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - ab} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2(1 - \frac{b}{a})} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a\sqrt{1 - \frac{b}{a}} = \frac{1}{2}a(1 - \sqrt{1 - \frac{b}{a}})$. Ved Hielp

af Analysis lader nu Udtrykket $\sqrt{1 - \frac{b}{a}}$ sig forvandle

le til denne Række: $1 - \frac{1}{2}\frac{b}{a} - \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2} - \frac{1}{16}\frac{b^3}{a^3}$.

Subtraheres dette fra 1 og Resten multipliceres med $\frac{1}{2}a$ saa faae vi den forhen nævnte Afstand $=$

$\frac{1}{4}p + \frac{1}{16}\frac{p^2}{a} + \frac{1}{32}\frac{p^3}{a^2} \dots$ Men i Parablen

var Brændepunktets Afstand fra Topunktet $[FA] = \frac{1}{4}p$ (§. 14). Følgelig er Forskiellen imellem

hiin og denne Afstand $\frac{1}{16}\frac{p^2}{a} + \frac{1}{32}\frac{p^3}{a^2} \dots$

Men denne Størrelse bliver stedse mindre jo større a er i Sammenligning med p . Ellipsens Brændepunkt nærmer sig saaledes mere til Parablen, og kan bringes saa nær dertil som man vil, naar Aksen a kan antages saa lang som man vil.

Till. 3. Have begge Linier samme Topunkt og Brændepunkt, hvis Afstand vi vil antage $= h$,
saa

saa er for Parablen p (Parameteren) $\equiv 4h$ (§.

14) og for Ellipsen $4h = \frac{4h^2}{a}$. Antage vi nu for

samme Abscisse x , Ordinaten i Parablen $\equiv z$

og i Ellipsen $\equiv y$, saa er $z \equiv \sqrt{4hx}$ (§. 14)

og $y \equiv \sqrt{4hx \left(1 - \frac{h}{a}\right) \times \left(1 - \frac{x}{a}\right)}$

følgelig $z - y \equiv 2\sqrt{hx} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{h}{a}} \times \sqrt{1 - \frac{x}{a}}\right)$

jo større altsaa a er i Sammenligning

med h og x ; en desmindre Deel af z er $z - y$

og desmere nærmere Punkterne i begge Linier sig hinanden, i Forhold til deres Afstand fra Axlen.

Jo mere altsaa a voxer for ethvert givet h og x , desmere nærmere disse frumme Linier (Parablen og Ellipsen) sig hinanden, og vil, naar a antages overmaade stor, være nær ved Toppunktet meget lidet forskellige fra hinanden.

§. 22.

Forfl. To Ellipser siges at være ligedanne (specie cædem) naar de uforanderlige Størrelser i Ligningerne for dem begge ere proportionale.

Lill. 1. Lad for en vis Ellipse de hidtil brugte Bogstaver a, p, c , betegne den store Axel, Parameteren og den mindre Axel; og for en ligedan Bogstaverne α, β, γ have samme Bemærkelse:

følgelig $a : \alpha = c : \gamma$ og $\gamma = \frac{ac}{a}$. Nu er

$p = \frac{c^2}{a}$ og $\beta = \frac{\gamma}{a}$ (§. 17). Deraf følgende

$$\text{Proportion } p : \beta = \frac{c^2}{a} : \frac{a^2 c^2}{a^2 \alpha} = 1 : \frac{\alpha}{a} \\ = a : \alpha.$$

Lill. 2. Lad Abscisserne til denne Ellipse regnede fra Middelpunktet, være u og t ; og de tilhørende Ordinater kaldes y og z ; fremdeles

være $a : \alpha = u : t$ og følgelig $t = \frac{au}{a}$ og

(Lill. 1) $\gamma = \frac{ac}{a}$ saa er (§. 18) $z^2 = \frac{1}{4}\gamma^2$

$$- \frac{\gamma t^2}{a^2} = \frac{a^2 c^2}{4a^2} - \frac{c^2}{a^2} \times \frac{a^2 u^2}{a^2} = \frac{a^2 c^2}{a^2}$$

$\left(\frac{1}{4} - \frac{u^2}{a^2}\right)$. Nu er (§. 17) $\frac{y^2}{c^2} = \frac{1}{4} - \frac{u^2}{a^2}$

og følgelig er $z^2 = \frac{a^2 c^2}{a^2} \times \frac{y^2}{c^2} = \frac{a^2 y^2}{a^2}$

eller $y^2 : z^2 = a^2 : a^2$, altsaa $y : z = a : \alpha$.

Lill.

Eill. 3. I ligedanne Ellipser ere saaledes alle bestandige Linier proportionerte, som og Ordinaterne naar de tilhørende Abscisser ere det.

Eill. 3. Tænk man sig i to Parabler Abscisserne x og v , Parameterne p og π i denne Proportion $p : \pi = x : v$, altsaa $v = \frac{\pi x}{p}$ saa forholde Quadraterne af de tilhørende Ordinater y og z (§. 13.) sig saaledes: $y^2 : z^2 = px : \pi v = px : \frac{\pi^2 x}{p} = p^2 : \pi^2$, og følgelig $y : z = p : \pi$. Alle Parabler ere altsaa ligedanne Figurer.

III: Om Hyperblen.

§. 23.

Med Hyperblen forstaae vi en frum Linie, hobeft (daaet Forholdet af retvinklede Coor-

dinat: r) $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$ og $a > p$. Af

de her forekommende bestandige Linier a og p kaldes a den store Arel (latus transversum) og p Parameteren.

Anm. Sætte vi i den for Ellipsen fundne Ligning (S. 18) $\pm a$ i Stedet for $-a$, saa har man Ligningen for Hyperblen. Paa Grund heraf er det, at man har anseet Ellipsen for en Hyperbel med nægtende Arel.

Lill. 1. For en Ordinate $y = 0$ antage vi enten $x = 0$ eller $px + \frac{px^2}{a} = 0$ da $px^2 = -apx$ og folgelig $x = -a$. Er altsaa A Begyndelsespunktet for Abscisserne og $AB = a$, saa ligge Punkterne A, B baade i Arelen og i Hyperblen, og ere folgelig dens Top Punkter.

Lill. 2. Da $y = \pm \sqrt{px + \frac{px^2}{a}}$ saa sees at til enhver Abscisse hster to hinanden modsatte Ord.

Ordinater (PM, Pm). Hyperblen bliver altsaa halveret af den forlængede Arel, eller deelt i to congruente Dele.

Lill. 3. For enhver bekræftende Abscisse bliver y^2 bekræftende, og saaledes $\sqrt{y^2}$ en mulig Størrelse der voxer i samme Forhold som x ; Ordinaterne voxer altsaa i dette Tilfælde uden Ende med Abscisserne. Hyperblens Grene løbe, ligesom Parablens (§. 13 Lill. 3), fort uden Ende, og fletne sig stedse længere fra hinanden.

Lill. 4. Vi havde (§. 23) $y^2 = px + \frac{px^2}{a}$, deraf $y^2 = px \left(1 + \frac{x}{a}\right) = \frac{px}{a} (a + x)$ tænke vi os nu x nægtende, saa sees følgende:

1) For enhver nægtende Abscisse ($-x$) som falder imellem 0 og a er den første Faktor $\frac{px}{a}$ nægtende, men den anden $a + x$ bekræftende; Produktet altsaa nægtende og y en umulig Størrelse; derfor gives imellem A og B ingen Punkter af Hyperblen.

2) For enhver nægtende Abscisse der er større end a ($-x > a$) blive begge de nybnævnte Faktorer nægtende, Produktet altsaa bekræftende, og y en mulig Størrelse, der voxer tilligemed x ;

Hyperblen gaaer derfor ud fra B , ligesom fra A , med to Grene, der uden Ende sner sig lige langt fra hinanden, og adskilles ved den forlængede Arel.

§. 24.

For Kl. Lad Middelpunktet af den store Arel C kaldes Hyperblens Middelpunkt. En lodret Linie Hh paa Middelpunktet af denne Arel, som kan hedde $c = \sqrt{ap}$, vil vi efter Ligheden med Ellipsen kalde den lille Arel. Man antager nemlig Hyperblen for en Ellipse, hvis mindre Arel $\sqrt{-ab}$ var en umulig Størrelse.

Lill. Efter det foregaaende er $c^2 = ap$ altsaa $p = \frac{a}{c}$. Indsættes denne Værdi i Hovedligning i Stedet for p , faae vi $y = \frac{c^2}{a}x + \frac{c^2x^2}{a^2}$, som er en Ligning for Hyperblen ved Hielp af den store og lille Arel.

§. 25.

Opgave. At finde en Ligning for Hyperblen, naar Middelpunktet antages til Abscissernes Begyndelsespunkt.

Oplosn.

Oplosn. Antage vi Abscissen $CP = u$
 saa er $AP = x = u - \frac{1}{2}a$ og $x^2 = u^2$
 $- au + \frac{1}{4}a^2$; indsættes nu denne Værdie for
 x , faae vi $y^2 = \frac{c^2}{a}u - \frac{1}{2}c^2 + \frac{c^2}{a^2}u^2 - \frac{c^2}{a}$
 $+ \frac{1}{4}c^2$, som forkortet giver $y^2 = \frac{c^2}{a^2}u^2 - \frac{1}{4}c^2$.

Anm. Denne Ligning kan dannes af den (§. 17)
 for Ellipsen fundne, naar der blot sættes $-c^2$
 i Stedet for c^2 , det er $c\sqrt{-1}$ i Stedet for c .

Lill. Den lodrette Linie Hh deler Hyperblen
 i to congruente Dele, som man falder modsatte
 Hyperbler, omendstiont de egentlig kun udgiøre
 een Hyperbel.

§. 26.

Opgave. At bestemme Brændepunktet F
 i en Hyperbel.

Oplosn. For Brændepunktet F er $y^2 =$
 $\frac{1}{4}p^2$ (§. 14) $= \frac{c^4}{4a^2} \dots \dots$ Nu er ogsaa
 $y^2 = \frac{c^2 CF^2}{a^2} - \frac{1}{2}c^2$; følgelig er $\frac{c^2 CF^2}{a^2} =$
 $\frac{1}{4}c^2 = \frac{c^4}{4a^2}$ og $CF^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4}$. Antage vi

nu

nu $CF = e$ saa er $e = \pm \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2}$

Hyperblen har saaledes to Brændepunkter, F og f , der begge ligge lige langt borte fra Middelpunktet.

Lill. Da $AF = CF - CA$, saa er, efter det Foregaaende, $AF = \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{2} -$

$$\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - a}{2}.$$

§. 27.

Opgave. At bestemme Forskiellen imellem de Linier, der fra et af Brændepunkterne trækkes til et og samme Punkt i Hyperblens Omkreds.

Oplos. I) Da $FM^2 = FP^2 + PM^2$ og $FP = CP - CF = u - e = u - \frac{\sqrt{a^2 + c^2} - a}{2}$; fremdeles $PM = y$, saa er

$$\begin{aligned} FM^2 &= u^2 - u\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{a^2}{4} + \frac{u^2 c^2}{a^2} \\ &= \left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right)u^2 - u\sqrt{a^2 + c^2} + \frac{1}{4}a^2. \end{aligned}$$

FM er altsaa ligestor med Quadratroden af denne

sammensatte Størrelse $\therefore FM = \frac{u\sqrt{a^2 + c^2}}{a} - \frac{1}{2}a$

naar

maaske FM vil være bestemmende, da der bestandig antages at $u > \frac{1}{2}a$.

$$\text{II) } fM^2 = \left(u + \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}\right)^2 + y^2 \\ = u^2 + u\sqrt{(a^2 + c^2)} + \frac{a^2}{4} + \frac{u^2 c^2}{a^2}, \text{ som}$$

$$\text{forfortet giver } fM = \frac{u\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} + \frac{1}{2}a$$

$$\text{III) Deraf følger } fM - FM = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a.$$

Bill. Antager man en vilkaarlig Linie x \gg $\frac{1}{2}a$ og tænker sig $fM = x + \frac{1}{2}a$. $FM = x - \frac{1}{2}a$, saa findes derved en Storrelse $= fM - FM$, hvorved forskellige enkelte Punkter i Ellipsens Omfærd lader sig bestemme paa en lignende Maade med hvad der er piist ved Ellipsen og Parablen.

Anm. Man har ogsaa mekaniske Redskaber, hvorved alle tre Reglesnittene ved en fortsat Bevegelse lade sig beskrive; Indretningen og Brugen af disse grunder sig paa Egenskaben af disse Liniers Brændepunkter.

§. 28.

Opgave. Lad paa CP være opreist den lodrette Linie PR saaledes, at $a : c = CP : PR$
der

Der forlanges at bestemme Længden af MR
 $= PR - PM$.

Løsning. Lad være $CP = a$, $PM = y$,
 $PR = z$, saa er $z = \frac{c^2}{a}$. Men $y^2 = \frac{c^2 x^2}{a^2}$
 $= \frac{1}{4}c^2$ (§. 27) følgelig $z^2 - y^2 = (z + y)$
 $(z - y) = \frac{c^2}{4}$ og $z - y = \frac{c^2}{4(z + y)}$.

Lill. Da $z + y$ bestandigt voxer naar a
 voxer, saa maa og $z - y$ bestandig aftage i sam-
 me Forhold, men kan dog aldrig blive $= 0$, saa
 længe a , og følgelig $z + y$, er en angivelig
 Størrelse.

§. 29.

Forklar. Givtes $Pr = PR$ og de rette
 Linier CR og Cr trækkes og forlænges i modsat
 Retning til N og n : da kaldes Linierne nCR og
 NCr (der have den Egenskab at de stedse nærme
 sig Hyperblen uden nogenstunde at naae den) Hy-
 perblens Asymptoter.

Anm. Parablens Sider (Grene) nærme sig
 stedse mere en ret Linie, der er parallel med Axlen;
 Hyperblens derimod nærme sig mere til de fra Ax-
 len divergerende Asymptoter.

Lill. 1. Antages DE lodret paa BA igien-
 nem Punktet A , saa er $CA : AD = CP :$
 $PR =$

$PR = a : c$, og følgelig $AD = AE = \frac{1}{2}ac$ og $CD = CE$, samt $\angle DCA = \angle ACE = \frac{1}{2}DCE$. Asymptote. Vinklen DCE bliver altsaa halveret af Axlen.

Exll. 2. Da Tang. $DCA = \frac{DA}{CA} = \frac{c}{a}$

følgelig en ægte Brøk, da $\frac{c}{a} < 1$. Nu er Tang.

$45^\circ = 1$, altsaa $\angle DCE$ spids, følgelig DCN stump.

Exll. 3. Da $RM = \frac{c^2}{4}(z+y)$, men Mr

$= z+y$, saa er $RM : Mr = \frac{c^2}{4}$, altsaa

saa en uforanderlig Størrelse.

§. 30.

Opgave. At finde Værdien for $CQ \times QM$ naar MQ er parallel med Cr .

Oploen. Er $MQ \parallel Cr$, saa er Trianglen $RQM \sim DCE$ og begge Triangler ligebe-
nebe, nemlig ($DC = CE$; $RQ = QM$), altsaa $DE : DC = RM : RQ = Mr : CQ$,

følgelig er $RQ = QM = \frac{DC}{DE} \times RM$ og

$CQ =$

$$\begin{aligned}
 CQ^2 &= \frac{DC}{DE} \times Mr, \text{ folgelig } CQ \times QM \\
 &= \frac{DC^2}{DE^2} \times RM \times Mr. \text{ Nu er } DC^2 = \\
 &\frac{a^2 + c^2}{4} \text{ og } DE^2 = c^2, \text{ altsaa } EQ \times QM \\
 &= \frac{a^2 + c^2}{16}.
 \end{aligned}$$

Till. 1. Sænk man sig CQ og QM som Coordinater paa Asymptoten, og antager $CQ = p$, $QM = q$, saa er $pq = \frac{a^2 + c^2}{16}$, som er en Ligning for Hyperblen imellem Asymptoterne.

Till. 2. Lad AG være være parallel med CE , saa er $CAG = ACE = ACG$ og $CG = CA$, altsaa $CG^2 = CG^2 \times GA = \frac{a^2 + c^2}{16}$ dette Kvadrat ($\frac{1}{16}$ af Summen af begge Axlernes Quadrater) kaldes Hyperblens Potens.

§. 31.

Lørefætn. Lad os antage at en vilkaarlig trukket ret Linie Rr skærer Hyperblens Grenne i Punkterne M, m og Asymptoterne i R og r , saa er $RM = rm$.

Oplosn.

Oplosn. Man trækker MQ , mq parallelle med Asymptoterne, saa er $RM : MQ = Rr : rC = mR : qC$, folgelig $RM = \frac{MQ \times mR}{qC}$;

og $rm : mq = rR : RC = Mr : QC$, altsaa $rm = \frac{mq \times Mr}{QC}$. Fremdeles er i Folge heraf

af $RM : rm = MQ \times mR \times QC : mq \times Mr \times qC$. Men nu er $MQ \times QC = mq \times qC$; folgelig $RM : rm = Mm : Mm$ og $RM = rm$.

Lill. Er Asymptoternes Beliggenhed bekiendt og et Punkt M i Hyperblen, da kan man finde de øvrige Punkter, naar man igiennem det givne Punkt trækker flere vilkaarlige Linier, som RMr og gior $rm = RM$.

§. 32.

Op g a v e. Naar Asymptoternes Beliggenhed og et Punkt M i Hyperblen er givet, da at finde dens Axel.

Oplosn. I) Ved Tegning. Man trækker $MQ \nparallel Cr$, halverer den givne Asymptote, Vinkel QCq ved CP , gior $CG = \sqrt{CQ \times QM}$ som er $= \frac{\sqrt{a^2 + c^2}}{4}$ trækker $GA \nparallel Cr$, saa

er CA den halve større og AD den halve lille Arel.

II) Ved Regning. Naar M er bekiendt er

det tillige givet, at $CQ \times QM = \frac{a^2 + c^2}{16}$ og

ved Beliggenheden af Asymptoterne eller ved Asymptote-Vinklen $= 2k$ er Forholdet imellem begge Arelne givet, da $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}a \times \text{tang. } k$ eller $c = a \times \text{tang. } k$. Indsættes nu i den

forrige Ligning denne Værdie i Stedet for c faae

$$\text{vi } CQ \times QM = \frac{a^2 + a^2 \times \text{tang. } k^2}{16} =$$

$$\frac{(1 + \text{tang. } k^2)a^2}{16} \text{ altsaa } \frac{16 \times CQ \times QM}{1 + \text{tang. } k^2}$$

$$= a^2 \text{ og } a = \frac{4\sqrt{(CQ \times QM)}}{\sec. k} = \sqrt{(CQ \times QM) \cos. k}.$$

Sættes derimod denne Værdie i Stedet for a i Ligningen $c = a \times \text{tang. } k$, faa faae vi $c = 4\sqrt{(CQ \times QM) \times \cos. k} \times \text{tang. } k = 4\sqrt{(CQ \times QM) \times \cos. k}$. \S . Ex.: sæt $k = 5$, $CQ = 25$, $QM = 4$.

Ex. 1. Ere nu a og c fundne faa har man

$$p = \frac{c^2}{a}.$$

Ex.

Till. 2. Ere a og c givne, saa finder man af Ligningen $\text{tang. } k = \frac{c}{a}$ Vinklen k , og deraf Værdien for $2k$

Eller: da $\text{tang. } 2k = \frac{2 \text{ tang. } k}{1 - \text{tang. } k^2}$ saa

$$\text{er tang. } 2k = \frac{2 \times \frac{c}{a}}{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \frac{2ac}{a^2 - c^2} = \frac{2ac}{(a+c) \times (a-c)}$$

§. 33.

Forklar. En Hyperbel, hvis Axler ere ligestore, og følgelig ogsaa ligestore med Parameteren falder ligesidet eller retvinklet.

Till. 1. Da $CA = AD$, saa er $ACD = 45^\circ$, altsaa $DCE = 90^\circ$.

Till. 2. Da $a = c$, saa er $p = \frac{c^2}{a} = a$

og $y^2 = u^2 - \frac{1}{4} a^2$, som er Ligningen for den ligesidede Hyperbel; hvor altsaa for alle mulige Ordinater u maa antages større end $\frac{1}{2} a$.

Till. 3. Tænker man sig en Cirkel bestrebet fra C med Radius CA , der berører Hyperbelen i Topunktet, og falder Ordinaten z der svarer til Abscissen u , regnet fra C , saa er $z^2 = \frac{1}{4} a^2 - u^2$ og

a^2 og z saaledes en mulig Størrelse, saalænge $u < \frac{1}{2} a$, som just er det modsatte hvad der er sagt om Hyperbelen (§. 33. Till. 2).

§. 34.

Forklar. En Hyperbel, hvis Ordinate y og Abscisse v bare tagne paa CH , for hvilken man

havde Ligningen $y^2 = \frac{a^2}{c^2} \times v^2 - \frac{1}{2} a^2$; og

den hidtil betragtede kaldes forbundne Hyperbler (hyperbolæ conjugatæ).

Till. 1. Antages $y = 0$, saa er $v = \frac{1}{2} c$, som bestemmer Afstanden fra Topunktet til C .

Till. 2. Da Tang. $HCR = \text{Cos. } DCA = \frac{a}{c}$, saa hører til den rette Linie CR Abscissen v ,

Ordinaten $z = \frac{a}{c} v$. Saaledes er $z^2 - y^2 =$

$= \frac{1}{4} a^2$ og $z - y = \frac{a^2}{4(z + y)}$, og CR

Asymptoten til den nye Hyperbel, og Asymptotvinklen NCR stump.

Till. 3. Den modsatte Hyperbel eller den halve Deel deraf, falder inden for Vinklen aCr , og den lille Axel falder imellem Toppunkterne; men den store Axel a ligger i Rummet, hvor ingen Ordi-

Ordinater ere, som just er det modsatte af den hidtil betragtede Hyperbel.

§. 35.

Hvad hidtil er foredraget om de frumme Linier, nemlig: Parablen, Ellipsen, Hyperblen og Cirkel-Linten (hvilke almindelig ere bekendt under Navn af Reglesnitte, da de frembringes paa en Regles frumme Overflade, naar den i forskellige Retninger gienneffiæres med en ret Glade) er foredraget analytisk; fortællig vil jeg nu vise hvorledes man synthetisk kan udlede de samme Ligninger ved at betragte Liniernes Beliggenhed i Reglesnittet.

Lad ADB (Fig. 3. Tab. VII.) være en lodret Regle, saa fremkommer ved et Snit af en Plan parallel med Grundfladen en Cirkel; lægges Planen parallel med en af Sidesfladerne frembringer Snittet en Parabel; lægges derimod den skjærende Plan saaledes, at den begynder under Toppunktet paa den ene Side af Reglen og gaar ud paa den anden Side uden at naae Grundfladen, da er Snittet en Ellipse. Skærr Snittet derimod saaledes, at den skjærende Plan er parallel med Reglens Axel, frembringes en Hyperbel; og tænkes denne Plan forlænget i en modsat Regle, frembringes en modsat Hyperbel.

§. 36.

Opgave. Af Snitter i Reglen at udlede en
Tegning for Parablen.

Oploen. I den rette Regle ABC (Tab. VII.
Fig 4) er EKG en Parabel; igiennem et vilkaar-
ligt Punkt I i Linien EH (Parablens Axel) fores-
tiller man sig et Snit parallel med Grundfladen,
som frembringer en Cirkel HKF , deri trækkes IK
lodret paa HF og EL ; igiennem Punktet E (Pa-
rablens Toppunkt) tænkes et Cirkelsnit parallel
med HKF , hvis Diameter er DE .

Nu er Linien IK lodret baade paa HF og EL ,
altsaa en Ordinate baade til Cirklen HKF og til
Parablen EGL . Efter den plane Geometrie er

$$IK^2 = HI \times IF$$

$$HI = DE$$

$$\triangle BDE \sim \triangle EIF, \text{ altsaa}$$

$$BD (BE) : DE = EI : IF$$

$$IF = \frac{DE \times EI}{BE}$$

indsættes nu i Tegningen $IK^2 = HI \times IF$, for
 HI og IF de saaledes fundne Værdier faae vi:

$$IK^2 = DE \times \frac{DE \times EI}{BE}$$

$$IK^2 = \frac{DE \times DE}{BE} \times EI$$

Kaldes nu $IK = y$ (Ordinaten) og $\frac{DE \times DE}{BE}$
 $= p$ (Parameteren, som sees at være en uforan-
dret Linie, nemlig en tredje Proportional-Linie til
 BE og DE , der blide uforandrede saalænge Pa-
rablen beholder samme Beliggenhed) og Linien
 $EF = x$ og disse algebraiske Udtryk indsættes i
den fundne Ligning, saa vi $y^2 = px$, som just
er den for Parabeln forhen givne Ligning.

§. 37.

O p g a v e. Af Snittets Beliggenhed i Reglen
at udlede en Ligning for Ellipsen.

Opløsn. I Reglen ABC (Fig. 5) være
 EKL Snittet der frembringer Ellipsen, hvid AE
bliver Linien EL ; igiennem et vilkaarligt Punkt I ,
paa denne Arel tænkes et Cirkelsnit NKF parallel
med Grundfladen AGC , Linien IK bliver da lod-
ret paa Gladen af Cirkelsnittet NKF og El-
lipsen LKE . Igiennem begge Endepunkterne af
Ellipsens Arel gøres Cirkelsnittene MOE og LQN
parallelle med NKF .

Efter Geometrien er

$$IK^2 = HI \times IF$$

nu søges andre bestemte Udtryk for HI og IF
saaledes: $\triangle LME \sim \triangle LIN$

$$\text{altsaa: } LE : EM = LI : IN$$

Anden Deel. Om krumme Linier.

A a

og

$$\text{og } IN = \frac{EM \times LI}{LE}$$

$$\Delta ELN \sim \Delta EIF$$

$$\text{altsaa: } LE : LN = IE : IF$$

$$\text{og } IF = \frac{LN \times IE}{LE}$$

Indsættes nu i Ligningen $IK^2 = HI \times IF$ de for HI og IF fundne Værdier sage vi

$$IK^2 = \frac{EM \times LI}{LE} \times \frac{LN \times IE}{LE}$$

$$IK^2 = \frac{EM \times LN}{LE} \times \frac{LI \times IE}{LE}$$

Sætte vi nu $IK = y$, $LE = a$ (Ellipsens Ape), $LI = x$ (Abscissa) og følgelig $LI = (a - x)$ og Udtrykket $\frac{EM \times LN}{LE} = p$ (en be-

stemt Linie som er en fjerde Proportional-Linie til Ellipsens Ape og Diameteren af de to Cirkler, der gennemskærer Reglen ved begge Ellipsens Top-punkter) Saa sene vi

$$y^2 = p \times \frac{(a - x)x}{a} = \frac{pax - px^2}{a}$$

Al $y^2 = px - \frac{px^2}{a}$ som er just den for Ellipsen tilførn angivte Ligning, hvoraf dens Egenskaber lade sig ulede, som i Forveien er forflaret.

§. 38.

Opgave. Af Snittenes Beliggenhed i en Regle at ulede Ligningen for Hyperblen.

Oplosn. Man tænke sig den rette Regle (Fig. 6.) ABC og den modsatte NBM . Snittet der frembringer Hyperblen være $GKDL$, der forlænget i den modsatte Regle, som vi ligeledes kan tænke større, vilde der ogsaa frembringe en Hyperbel, som kaldes den modsatte. Igiennem et vilkaarligt Punkt i Abscisse-Linien GL eller den forlængede Axl MG tænkes et Cirkelsnit $HKFI$ parallel med Grundfladen, ligeledes igiennem Axlens Endepunkter G og M , Cirkelsnittene OEG og NPM parallelle med HKF , saa er

$$IK^2 = HI \times IF$$

Vi søge nu ligesom ved Ellipsen andre bestemte Udtryk for HI og IF , saaledes:

$$\Delta MOG \sim \Delta MHI$$

$$\text{og } MG : GO = MI : IH$$

$$IH = \frac{GO \times MI}{MG}$$

$$\text{fremdeles } \Delta GIF \sim \Delta GMN$$

$$\text{og } MG : MN = GI : IF$$

$$IF = \frac{MN \times GI}{MG}$$

Indsættes nu disse Værdier i den ovenanførte Ligning $IK^2 = HI \times IF$, saa findes

$$IK^2 = \frac{GO \times MI}{MG} \times \frac{MN \times GI}{MG}$$

$$IK^2 = \frac{GO \times MN}{MG} \times \frac{MI \times GI}{MG}$$

Linien $\frac{GO \times MN}{MG}$ er en ved Snittet bestemt

Linie, som vi ligesom ved Ellipsen kalde p , vi have da

$$IK^2 = p \times \frac{MI \times GI}{MG} \text{ sætte vi nu}$$

efter Bødtagt og det forhen anførte $GI = x$ (Abscisse) $GM = a$ (Axe) altsaa $MI = a + x$

og $IK = y$, og indsætte disse Udtryk i den fundne

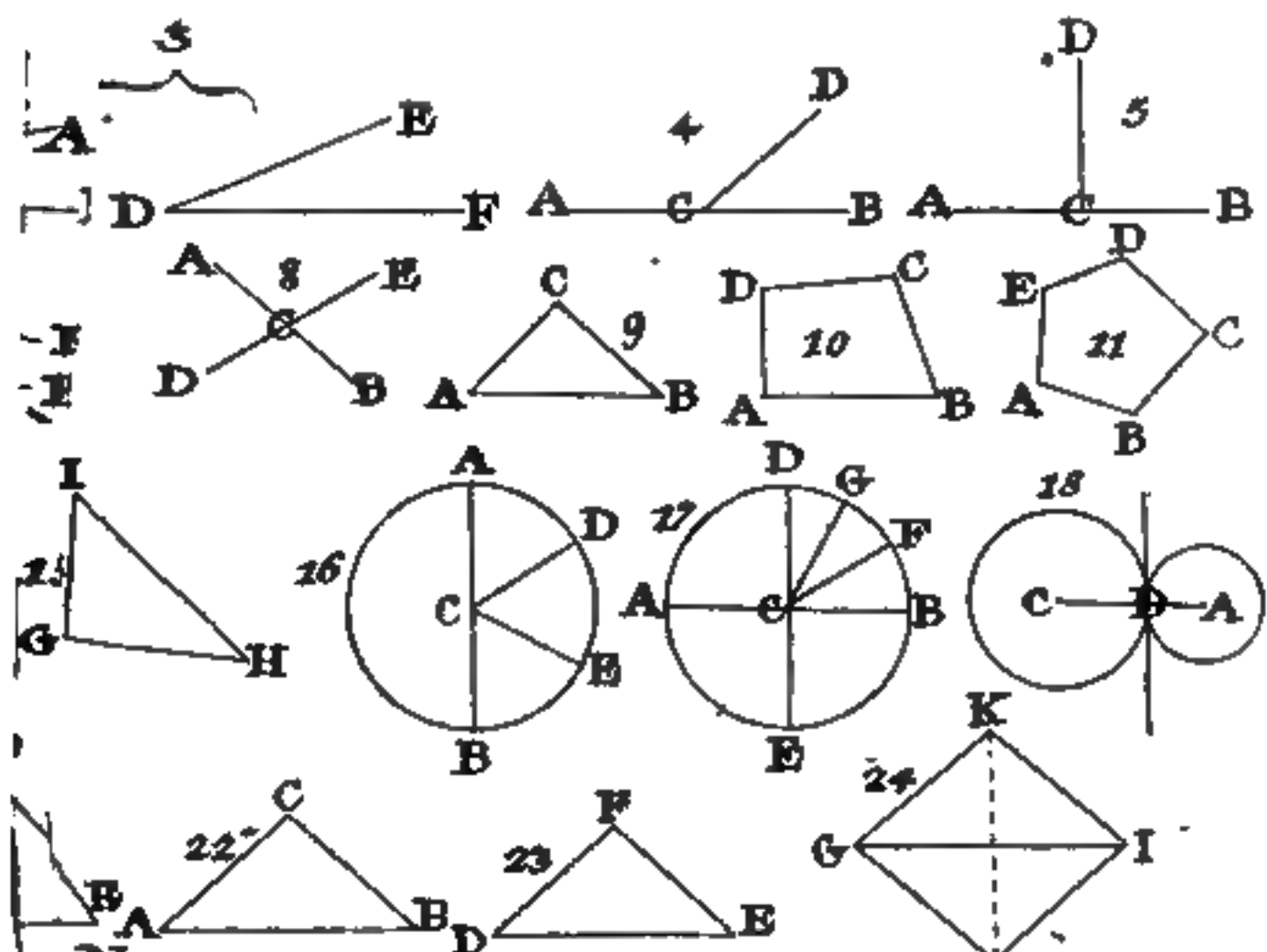
$$\text{ne Ligning, saa have vi } y^2 = p \frac{(a + x)x}{a}$$

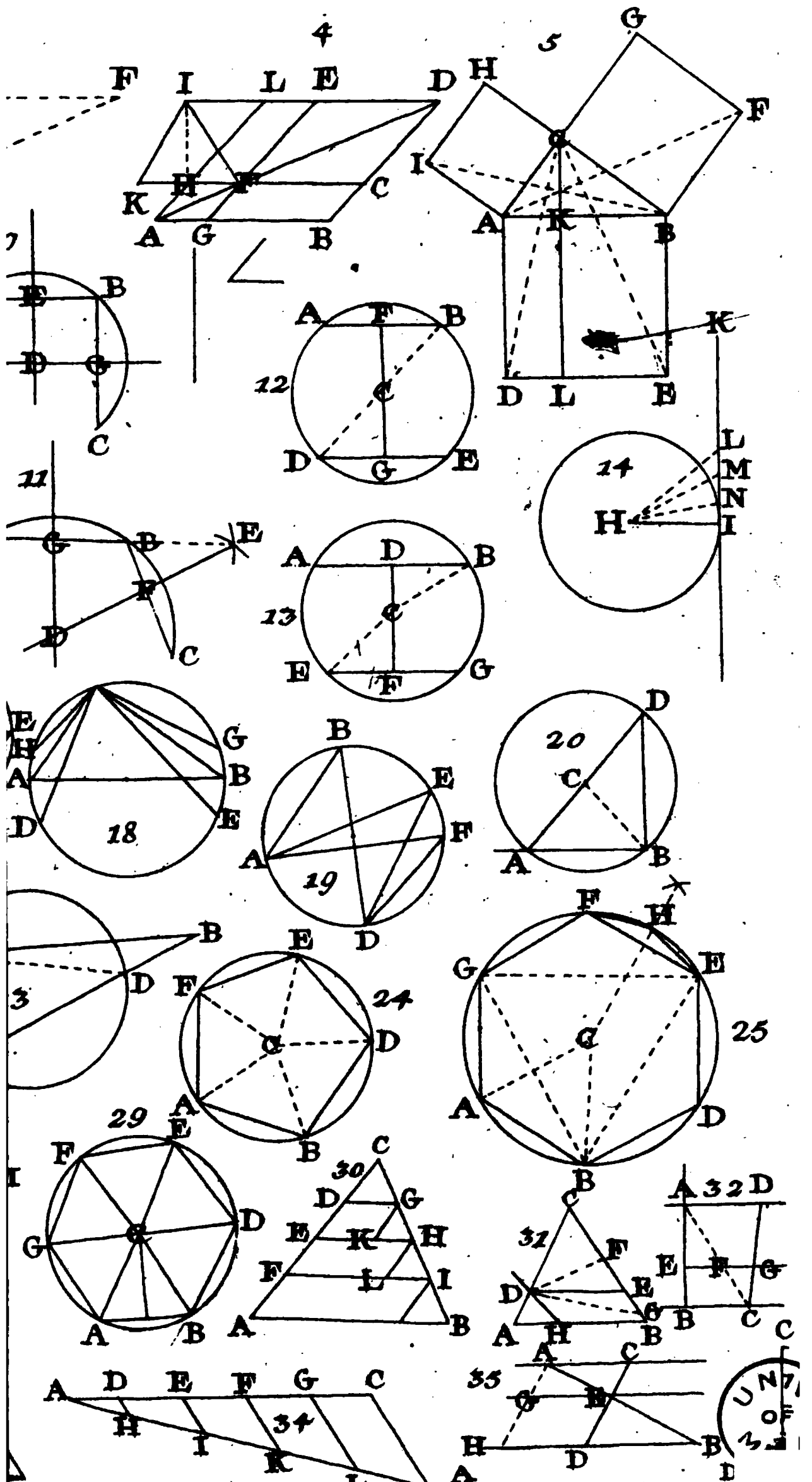
$$= p \times \frac{ax + x^2}{a} = \frac{pax + px^2}{a} = px +$$

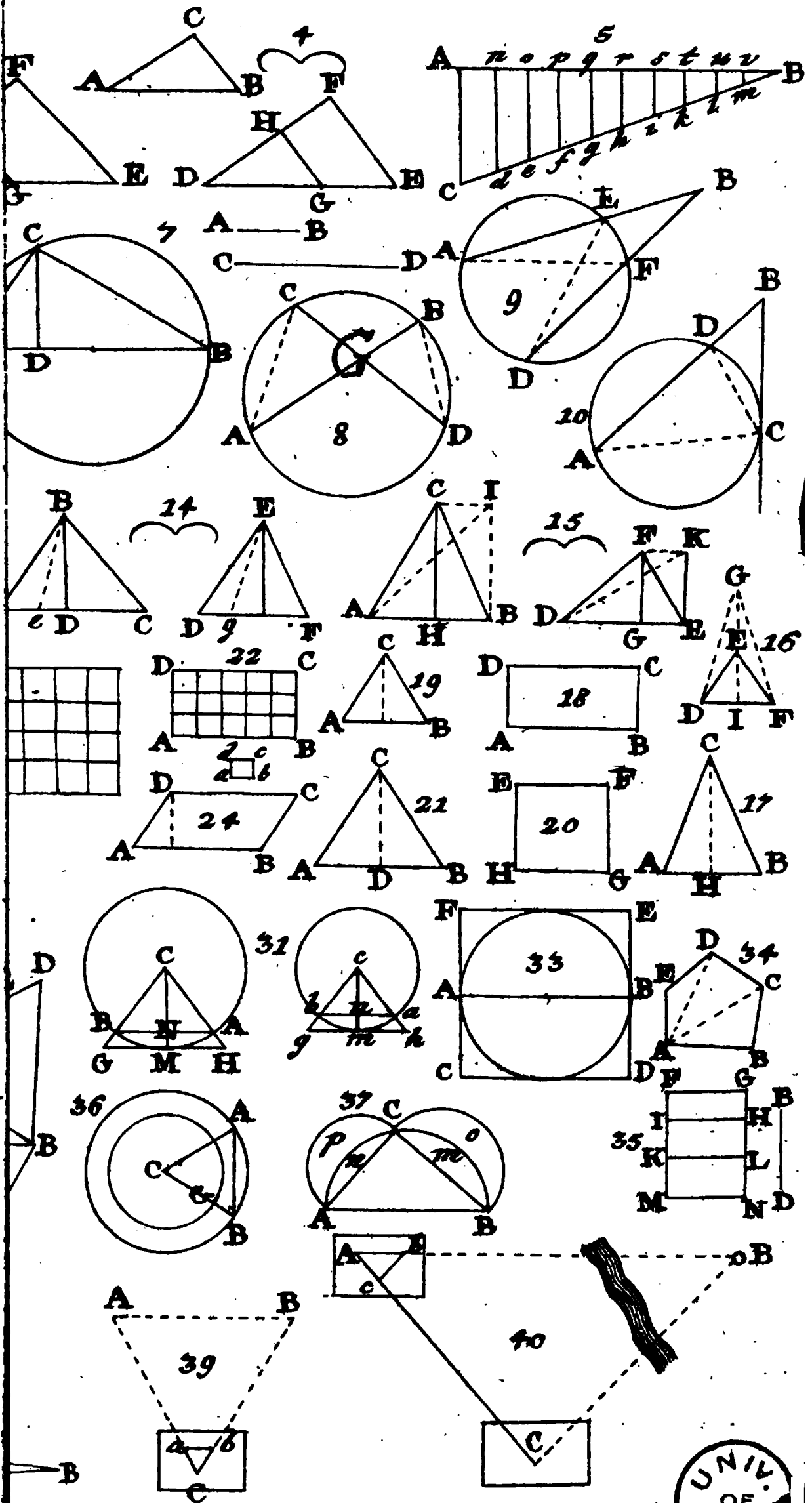
$$\frac{px^2}{a}, \text{ som just er den for Hyperblen tilforn anførte}$$

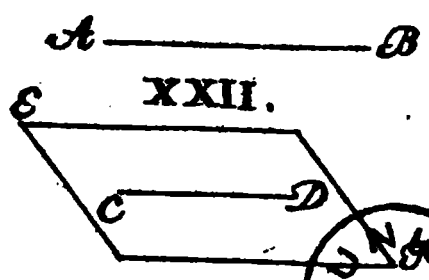
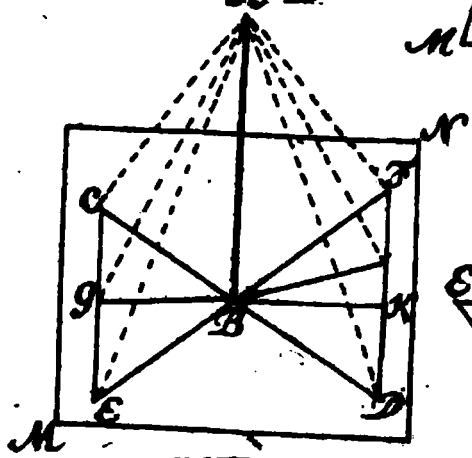
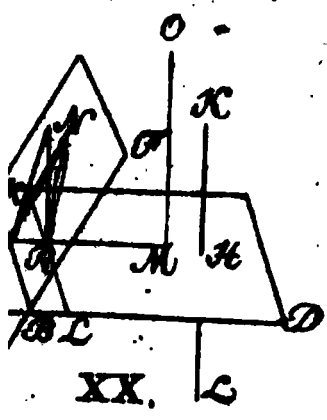
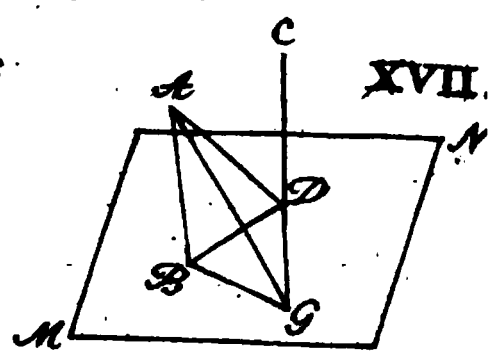
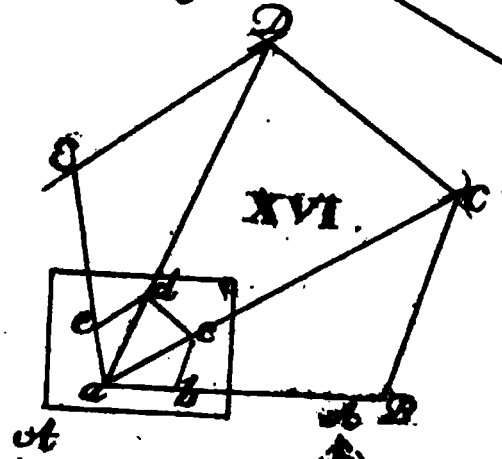
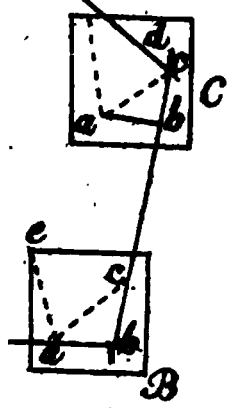
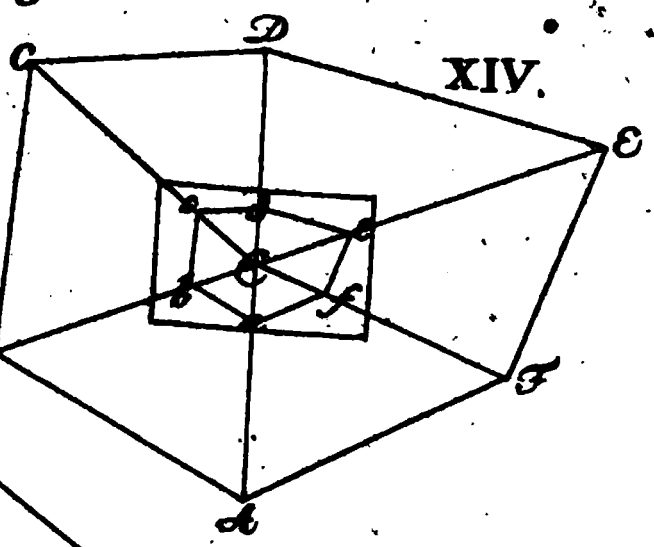
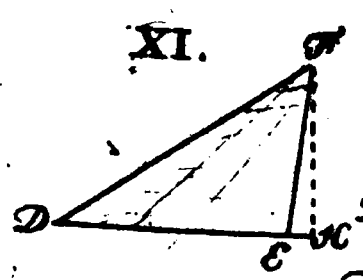
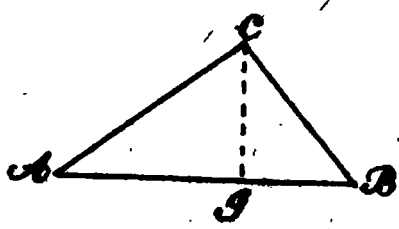
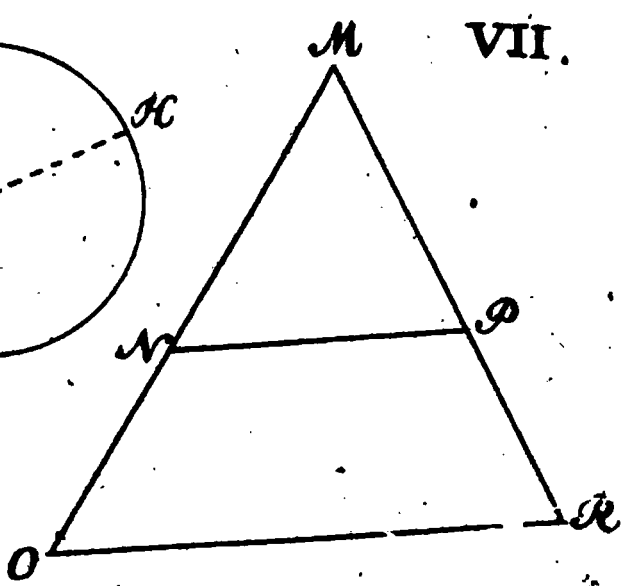
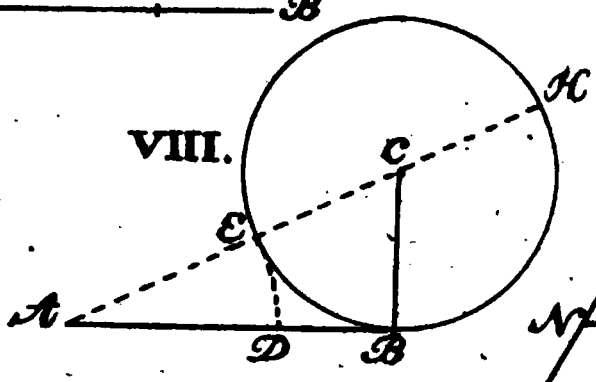
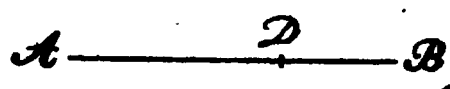
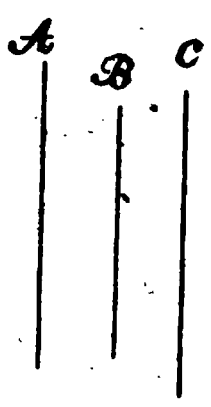
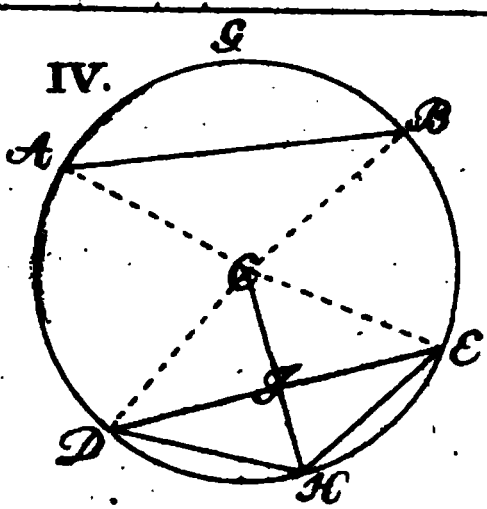
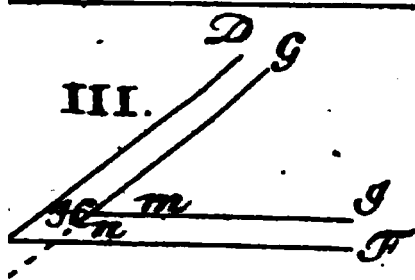
Ligning, hvoraf dens Egenskaber lade sig udlede.

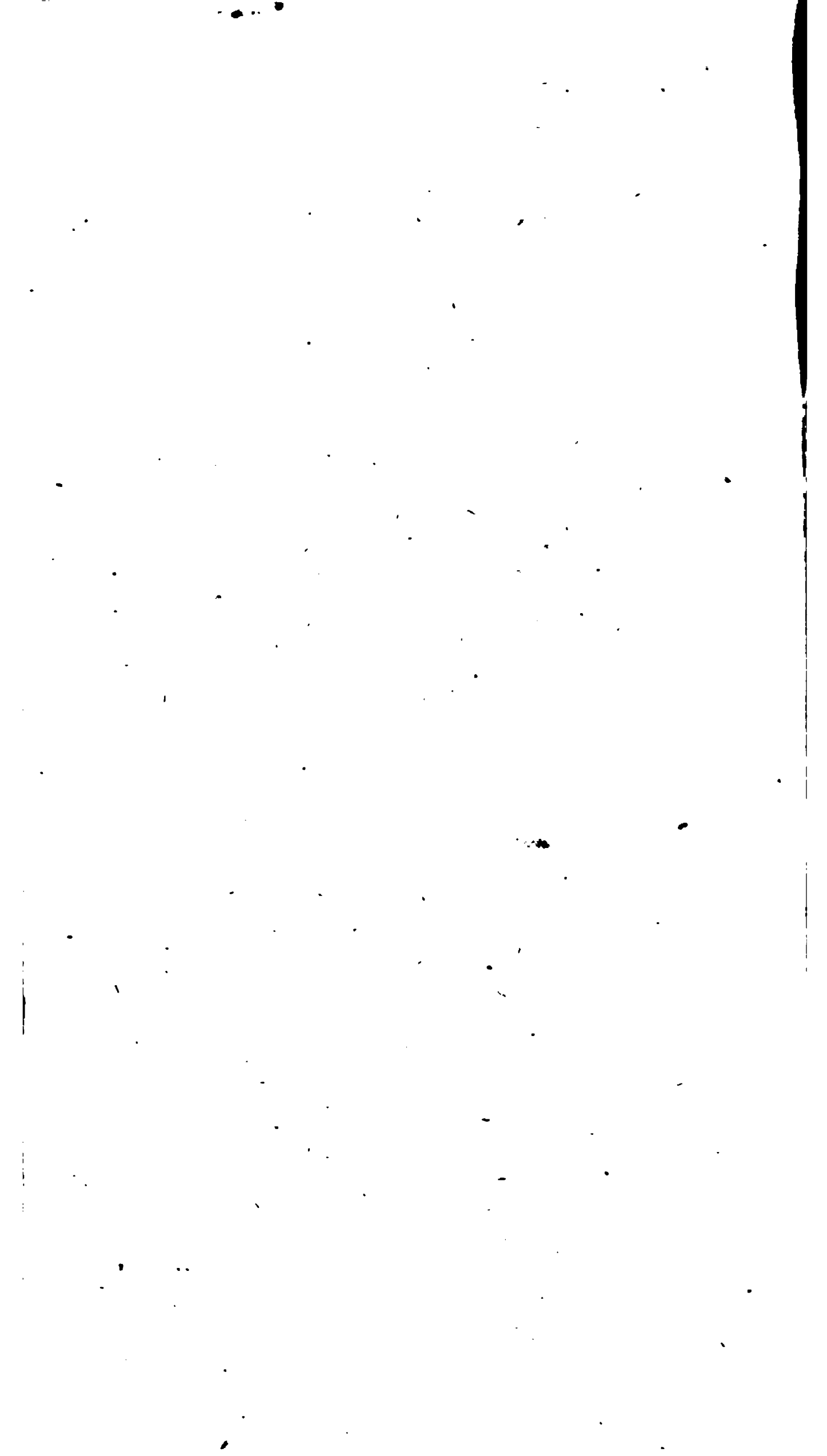
Anm. Fig. 7, 8, 9, Tab. VII. forestiller hvorledes Parablen, Ellipsen og Hyperblen ved Snitte igiennem en Kegel virkelig frembringes.

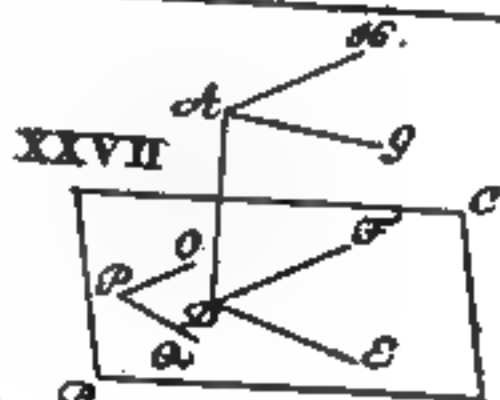
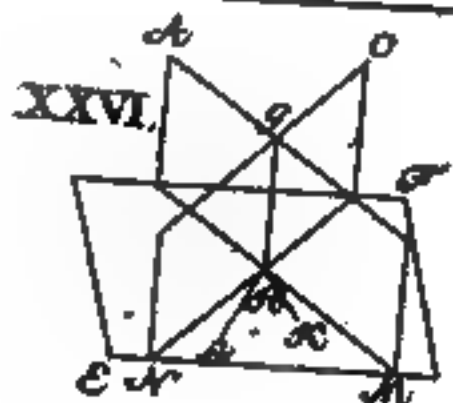




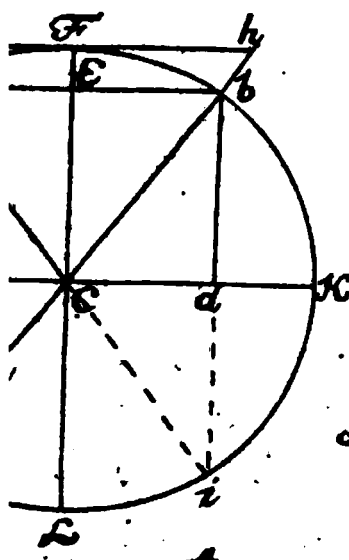




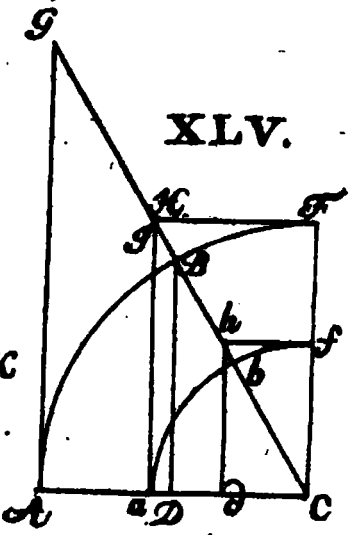




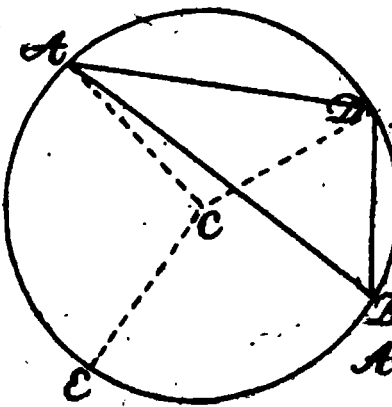
XLIV.



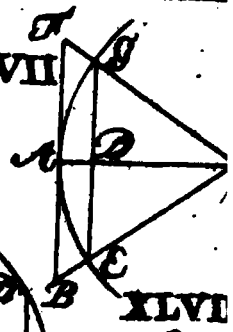
XLV.



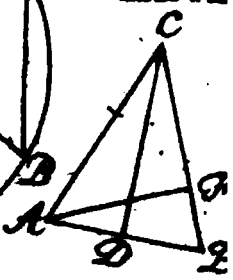
XLVI



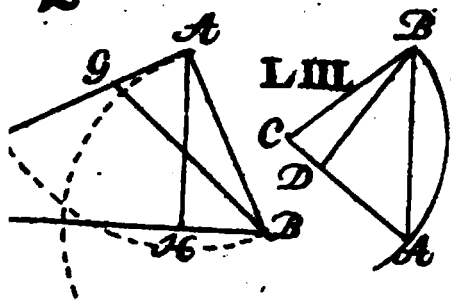
XLVII



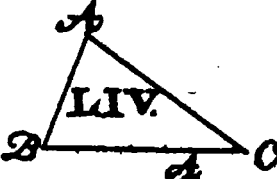
XLVIII



LIII



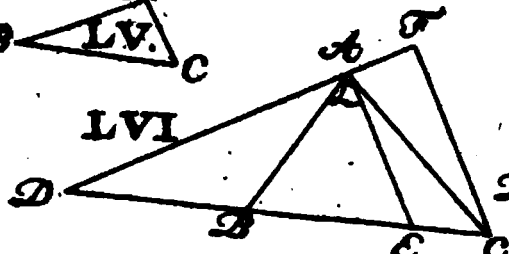
LIV.



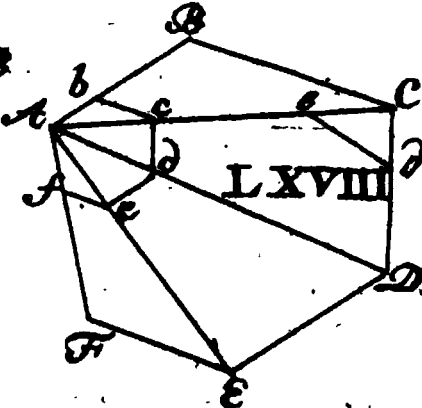
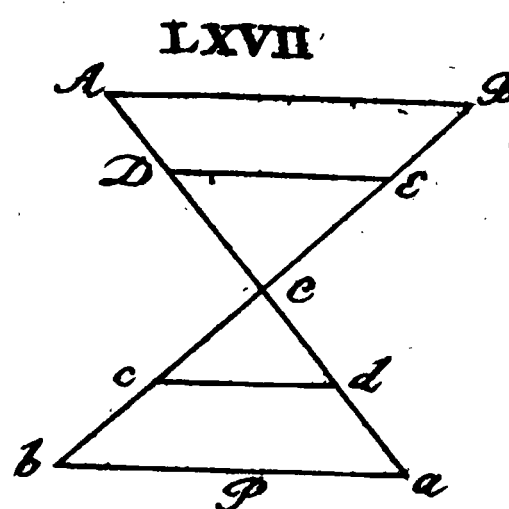
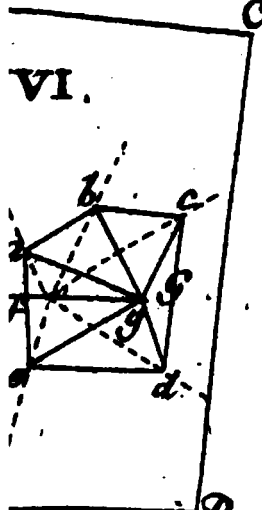
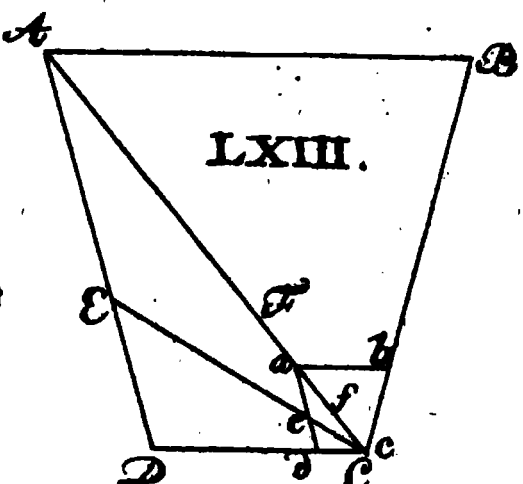
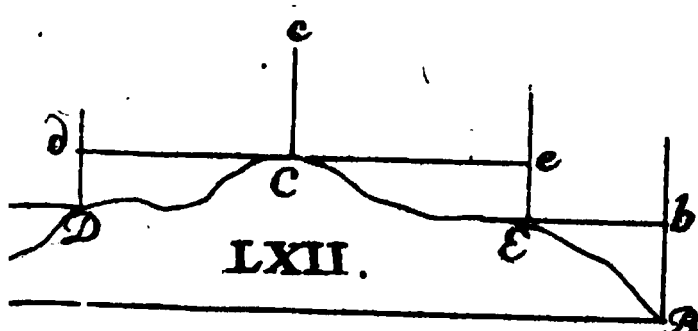
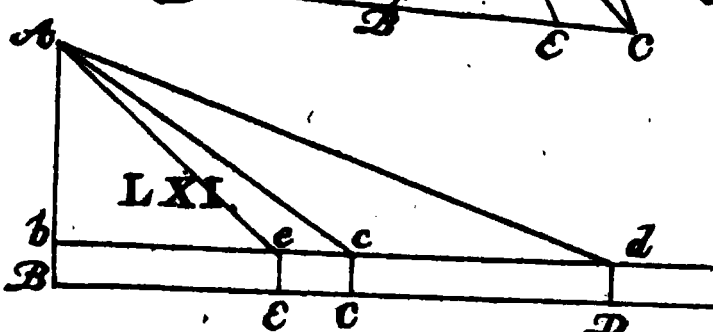
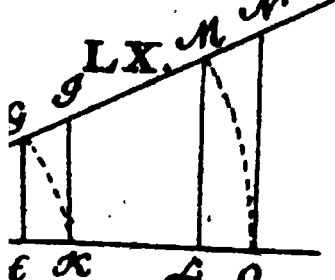
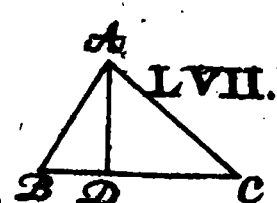
LV.



LVI



LVII.



VI.

